

Takács Gábor tudományos főmunkatárs
MTA-ELTE Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoport

Végesméret effektusok a kvantumtérelméletben

MTA doktori értekezés

Benyújtva: 2007. február

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is köszönetet mondok mindazoknak, akik nélkül ez a munka nem jöhetett volna létre. Horváth Zalánnak, egykori PhD témavezetőmnek, aki a kutatócsoport vezetőjeként munkahelyet biztosított számomra, és számos ösztöndíjam esetén magára vállalta a vezető kutató szerepét. Palla Lászlónak, aki mindig figyelmesen meghallgatta gondolataimat, problémáimat, és oly sok hasznos tanáccsal látott el. Bajnok Zoltánnak, akivel hosszú időt töltöttünk el munkahelyünkön összezárva, aki nélkül számos eredmény nem született volna meg, és aki – néha nem is értem, hogyan – képes volt elviselni nem éppen könnyű természetemet, feledékenységemet, figyelmetlenségemet, mindig segítőkészen, mindig barátként. Gerard Wattsnak, aki cambridge-i közös munkánk során pályafutásom legnagyobb szakmai válságán segített át; nélküle talán nem is folytattam volna, barátsága ma is rengeteget jelent nekem. Köszönet illeti Patrick Dorey-t, Patkós Andrást, Francesco Ravaninit és sokan másokat, akik felsorolására nem is vállalkozom. Bajnok Zoltánt és Palla Lászlót külön köszönet illeti a kézirattal kapcsolatos megjegyzésekért.

Ezt a munkát Anitának ajánlom, akinek mindenki közül a legtöbbet köszönhetem. Nemcsak annyiban, hogy feleségként nyugodt háttérrel biztosított munkámhoz, ami önmagában is igen megterhelő volt, három gyermekkel nehezítve, hanem szellemileg is egyenértékű társként.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető és áttekintés: végesméret effektusok szerepe a kvantumtérelméletben . . .	9
2. Periodikus határfeltételek: aszimptotikus viselkedés nagy és kis térfogatban	12
2.1. Nagy térfogat: vezető végesméret korrekciók	12
2.1.1. Tömegkorrekciók	12
2.1.2. Kétrészecske állapotok	14
2.2. Kis térfogat: konform térelmélet	15
2.2.1. A nagy energiás viselkedés osztályozása $1 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletekben	15
2.2.2. Végesméret effektusok kis térfogatban: konform térelméleti leírás	16
3. Perturbált konform térelméleti megközelítés	19
3.1. Relativisztikus kvantumtérelmélet mint egy konform térelmélet deformációja	19
3.2. Konform perturbációszámítás: általános megjegyzések	20
4. Közelítő módszerek a spektrum leírására véges térfogatban	22
4.1. Konform perturbációszámítás	22
4.2. Konform variációszámítás: a csonkolt konform állapotér közelítés	24
4.2.1. TCSA perturbált konform minimálmodellekben	26
4.2.2. TCSA a $c = 1$ szabad bozon releváns perturbációjára	28
5. Egzakt módszerek integrálható kvantumtérelméletekben	31
5.1. Bethe-Yang egyenletek	31
5.1.1. Sokrészecske állapotok végesméret korrekciói nemdiagonális szórás esetén	31
5.1.2. Sokrészecske állapotok végesméret korrekciói kink elméletekben	33
5.2. Termodinamikai Bethe Ansatz	34
6. Destri-de Vega egyenletek	35
6.1. A DdV egyenlet származtatása	36
6.1.1. Fénykúp rács regularizáció	36
6.1.2. A számláló függvény és a Bethe gyökök osztályozása	37
6.1.3. A DdV egyenlet a rácson és a kontinuum határeset	38
6.2. Nagy térfogat (infravörös) határeset	43
6.2.1. Csak lyukakat tartalmazó állapotok	43
6.2.2. Semleges kétrészecske állapotok	43
6.2.3. Infravörös határeset a vonzó tartományban	46
6.2.3.1. Lélegző-szoliton szórás	47
6.3. Kis térfogat (ultraibolya) határeset	48
6.4. Páratlan topológiai töltésű állapotok	55
6.4.1. A bozonikus (sine-Gordon) modell esete	55
6.4.2. A fermionikus (tömeges Thirring) modell leírása	56
6.5. Összehasonlítás a csonkolt konform állapotér közelítéssel	57
6.6. A Zamolodchikov-féle α -csavart szektorok és a minimálmodellek $\Phi_{(1,3)}$ perturbációja . . .	59
6.6.1. α -csavart szektorok	59
6.6.2. A $\Phi_{(1,3)}$ perturbált minimálmodellek gerjesztett állapotai	61
6.6.2.1. Az ultraibolya határeset	62
6.6.2.2. Összehasonlítás a csonkolt konform állapotér közelítéssel	63
7. Alkalmazások kvantumtérelméleti problémákra	65
7.1. A k -hajtogatott sine-Gordon modell	66
7.1.1. A lokális operátor algebra megválasztása	66
7.1.2. Instantonok és ϑ -vákuum véges térfogatban	67
7.1.2.1. Ritka instanton gáz közelítés	67

7.1.2.2.	Vákuum szerkezet a k -hajtogatott sine-Gordon modellben	68
7.1.3.	A hajtogatott modell spektruma és S mátrixa	70
7.1.4.	Exponenciális operátorok vákuum várható értéke	72
7.2.	A kétfrekvenciás sine-Gordon modell	75
7.2.1.	Form-faktor perturbációszámítás	76
7.2.1.1.	A ζ -ban vezető korrekciók	77
7.2.1.2.	Alkalmazás a kétfrekvenciás sine-Gordon modellre	78
7.2.1.3.	Csonkolt konform állapotter közelítés a kétfrekvenciás sine-Gordon modellre	79
7.2.2.	A kétfrekvenciás sine-Gordon modell tömegspektruma és a szemiklasszikus tömegformula	80
7.2.2.1.	A DSG ₂ modell tömegspektrumának problémája	80
7.2.2.2.	TCSA analízis	82
7.2.2.3.	Elméleti interpretáció	85
7.2.3.	Fázisátalakulás vizsgálata végesméret effektusok segítségével	87
7.3.	Rezonanciák jellemzése végesméret effektusok segítségével	92
7.3.1.	A form-faktor perturbációszámítás jóslata a bomlási állandóra	92
7.3.1.1.	Ising modell	92
7.3.1.2.	DSG ₂ modell	93
7.3.2.	Rezonanciák jelei véges térfogatban	94
7.3.3.	A bomlási állandó meghatározása a TCSA spektrumból	98
7.3.3.1.	A form-faktor perturbációszámítás összehasonlítása a TCSA-val (Ising modell)	98
7.3.3.2.	Numerikus módszerek a bomlási szélességek meghatározására	98
7.3.3.3.	Eredmények az Ising modellben	101
7.3.3.4.	Eredmények a DSG ₂ modellben	101
7.3.4.	Általánosítási lehetőségek	102
7.4.	Nemunitér kvantumtérelméletek spektruma	102
7.4.1.	Általános megfontolások	105
7.4.1.1.	Unitaritás és valós spektrum	105
7.4.1.2.	A tanulmányozott modellek	105
7.4.2.	Imagináriusan csatolt affin Toda elméletek véges térfogatú spektruma	108
7.4.2.1.	$a_2^{(1)}$	108
7.4.2.2.	$a_2^{(2)}$	108
7.4.3.	Klasszikus időkések és S mátrix	109
7.4.4.	Perturbált konform térelméletek	111
7.4.4.1.	$\mathcal{M}_{r,s} + \Phi_{1,3}$	111
7.4.4.2.	$\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{1,2}/\Phi_{2,1}$ és $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{1,5}$: általános megjegyzések	111
7.4.4.3.	$\Phi_{1,2}$ perturbációk, $\pi/\gamma > 1$	112
7.4.4.4.	$\Phi_{1,2}$ perturbációk, $\pi/\gamma < 1$	112
7.4.4.5.	$\Phi_{1,5}$ perturbációk, $\pi/\gamma > 1$	115
7.4.4.6.	$\Phi_{1,5}$ perturbációk, $\pi/\gamma < 1$	115
7.4.5.	Következtetések	116
8.	Nyílt határfeltételek (peremes kvantumtérelméletek)	119
8.1.	Végesméret effektusok perem jelenlétében	119
8.1.1.	Peremes Bethe-Yang egyenletek	119
8.1.2.	Peremes kötött állapotok leírása véges térfogatban	121
8.1.3.	Peremes termodinamikai Bethe Ansatz	122
8.1.4.	A TCSA módszer peremes kiterjesztése	123
8.2.	A peremes sine-Gordon elmélet véges térfogatban: TCSA analízis	125
8.2.1.	Általános (perturbált Neumann) határfeltételek	125
8.2.1.1.	A perem energiája	125
8.2.1.2.	Reflexiós faktorok és a peremes gerjesztett állapotok spektruma	126
8.2.2.	TCSA: Dirichlet határfeltételek	128
8.3.	Peremes sine-Gordon elmélet véges térfogatban: szemiklasszikus eredmények	128
8.3.1.	Vákuummegoldások végtelen térfogatban	128

8.3.2.	Véges térfogat: általános megfontolások	131
8.3.2.1.	Sztatikus megoldások	131
8.3.2.2.	Kis rezgések	132
8.3.3.	Eredmények	133
8.4.	Reflexiós faktor és peremállapot formalizmus tetszőleges dimenzióban	136
8.5.	Vákuumállapot véges térfogatban: vezető korrekciók	139
8.5.1.	Klaszter kifejtés	139
8.5.2.	A peremes TBA infravörös kifejtése	141
8.5.3.	A peremes Lüscher-formula alkalmazása a sine-Gordon modellre	143
8.5.3.1.	Összehasonlítás a peremes DdV egyenlettel	144
8.5.3.2.	Klasszikus határeset	145
8.5.4.	A $g-\bar{g}$ összefüggés igazolása és kiterjesztése tetszőleges dimenziószámra	149
8.6.	Alkalmazás a Casimir effektusra	150
8.6.1.	Defektek a peremállapot formalizmusban	151
8.6.2.	A Casimir effektus származtatása	152
9.	Összegzés és kitekintés	155
9.1.	Összefoglalás	155
9.2.	Érdekes kérdések, nyitott irányok	156
A.	Jelölések és konvenciók	158
A.1.	Kvantumtérelméleti konvenciók	158
A.2.	Konvenciók $D = 2$ esetén	159
B.	Konform térelméleti módszerek	161
B.1.	Konform térelmélet a komplex síkon	161
B.2.	Virasoro ábrázolás bázisának előállítása	164
B.3.	Belső szorzatok számítása Virasoro ábrázolásokban	165
B.4.	Leszármaztatott terek hárompont csatolásainak számítása	166
B.5.	A szabad konform skalármező	168
B.5.1.	Kompakt szabad bozon periodikus határfeltételekkel	168
B.5.2.	Konform invariáns határfeltételek	171
B.5.2.1.	Neumann határfeltétel	171
B.5.2.2.	Dirichlet határfeltétel	172
B.6.	Vertex operátorok mátrixelemeinek számítása	173
B.6.1.	Periodikus határfeltételek	173
B.6.2.	Vertex operátorok mátrixelemei a peremes esetben	174
B.6.2.1.	Neumann határfeltétel	174
B.6.2.2.	Dirichlet határfeltétel	175
C.	Integrálható kvantumtérelméletek	176
C.1.	Integrálható elméletek S mátrixa	176
C.1.1.	Az egzakt S mátrix elmélet alapjai	176
C.1.2.	A skálázó Lee-Yang modell	178
C.1.3.	A kritikus Ising modell mágneses perturbációjának S mátrixa	179
C.1.4.	A sine-Gordon elmélet S mátrixa	180
C.1.5.	Kink S mátrixok	181
C.1.6.	A Virasoro minimálmodellek $\Phi_{1,5}$ perturbációjának egzakt S mátrixa	183
C.2.	Reflexiós faktorok peremes integrálható modellekben	185
C.2.1.	Az egzakt R mátrix elmélet alapjai	185
C.2.2.	A peremes sine-Gordon elmélet reflexiós faktora	186
	Irodalomjegyzék	190
	Tárgymutató	199

1. Bevezető és áttekintés: végesméret effektusok szerepe a kvantumtérelméletben

Közismert, hogy a kvantumtérelméletek nagyon széles területen alkalmasak fizikai rendszerek modellezésére. A modern részecskefizika elképzelhetetlen lenne nélkülük, de kvantumtérelméleti módszereket használnak a modern szilárdtestfizikában (vagy általánosabban a kondenzált anyagok fizikájában) is, illetve a statisztikus fizika számos területén, tipikusan fázisátalakulások modellezésére.

Fontos észrevenni, hogy a valóságban szinte soha nem találkozunk idealizált, végtelen térfogatban létező rendszerekkel, és még a szokásos végtelen térfogatban megfogalmazott kvantumtérelméletben is számos alkalommal használunk véges térfogatbeli megfogalmazást, mint pl. a szórási hatáskeresztmetszet kiszámításakor. Az ezzel modellezett fizikai jelenségek is véges térfogatban mennek végbe, hiszen a gyorsítókban a részecskenyalábok általában nem végtelen kiterjedésű vákuumban, hanem a gyorsító kamrájában találkoznak. Ennek a térfogatnak a skálája persze sokkal nagyobb, mint a modellezni kívánt elemi folyamatokra jellemző skála, ezért a számított és mért hatáskeresztmetszetek függése ettől a véges mérettől és a peremfeltételektől elhanyagolható, és a kvantumtérelméleti számításokban a megfelelően értelmezett mennyiségek végtelen térfogatbeli határesetét számoljuk ki. Hasonlóan, szilárdtestfizikai alkalmazásokban tipikusan a minta mérete jóval nagyobb, mint az atomok közti távolság, így a legtöbb esetben a végtelen nagy mintára vonatkozó idealizáció megengedhető.

Azonban rengeteg olyan fizikai szituáció van a valóságban is, amikor a végesméret effektusok jelentős szerepet játszanak. Például másodrendű fázisátalakulási pontban (idealizált végtelen rendszerben) a korrelációs hossz divergál. Egy véges mintában azonnal jelentős függést tapasztalunk a minta méretétől, amint azzal a korrelációs hossz összemérhetővé válik. Az ideális értelemben vett fázisátalakulás mint olyan maga is csak végtelen rendszerekben létezik; a valóságban mindig véges rendszerekkel van dolgunk¹.

A másik jellemző alkalmazási területet az erős kölcsönhatás rácsérelméleti megközelítése kínálja. A téridő rács mindenképpen véges rendszer, ilyen módon a végesméret effektusok mindig jelen vannak. Természetesen gondolhatunk arra, hogy a termodinamikai határátmenet alkalmazásával (azaz a térfogatot végtelenbe extrapolálva) ezektől megszabaduljunk, ám ezt részben a numerikus számítások nehézségei miatt reménytelen teljes mértékben keresztülvinni, részben pedig még ha lehetséges lenne is, az extrapolációhoz akkor is ismernünk kell a véges mérettől való függés jellegét. Sokkal termékenyebbnek tűnik az a hozzáállás, amely Lüscher úttörő munkája [Lus86a, Lus86b] nyomán a végesméret effektusokat megpróbálja kiaknázni a kvantumtérelméltre jellemző mennyiségek, pl. az S mátrix meghatározására. Valójában a szórásamplitúdók meghatározására, valamint pl. rezonanciák mérésére rácsérelméletben nincs is más eszközünk; ennek oka, hogy a termodinamikai határesetben minden, a vákuumtól véges távolságban fekvő állapot zérus impulzusú részecskék összességéhez tart, vagyis a küszöbparamétereken kívül más nem is lehet meghatározni (lényegében erre vonatkozik a Maiani-Testa-féle „no-go” tétel [MT90], aminek egy fontos következménye, hogy rácson rezonanciákat nem lehet termodinamikai határesetben tanulmányozni). Vegyük figyelembe azt is, hogy kvantumtérelméleti végesméret korrekciók ma már közvetlenül kimérhetők laboratóriumban is: meg fogom mutatni, hogy a Casimir effektus pontosan ilyen természetű jelenség.

¹ Leszámítva esetleg a kozmológiai méretskálát.

A jelen munka alapja éppen ez a megközelítés, amelyben a végesméret effektusokra úgy tekintünk, mint egy lehetséges eszközre annak érdekében, hogy többet megtudjunk a kvantumtérelméletek minket érdeklő kérdéseiről. Ehhez először is minél alaposabban meg kell értenünk a végesméret effektusok természetét, kapcsolatát a kvantumtérelméleti formalizmussal, hogy aztán az így szerzett tudást hasznosíthassuk.

Ennek megfelelően a dolgozat során először a végesméret effektusok kvantumtérelméleti tanulmányozását tárgyalom. A 2. fejezetben emlékeztetek arra, ami a térfogat két aszimptotikus tartományában ismert. Nagy térfogatban, tetszőleges téridő dimenzióban a Lüscher által kifejlesztett formalizmus alkalmazható, kis térfogatban pedig ($1 + 1$ téridő dimenzióban) Cardy-t követve konform térelméleti leírást használhatunk [CP88]. Ezután nagyrészt $1 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletekre koncentrálok, de több helyen látni fogjuk majd az eredmények általánosítását magasabb dimenziós elméletekre is.

A 3. fejezetben bevezetem az $1 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletek esetén nagyon hatékony perturbált konform térelméleti leírást, amikor a vizsgálni kívánt rendszert az ultraibolya renormálási csoport fixpontot leíró konform térelmélet releváns operátorral történő perturbációjaként fogalmazzuk meg. Az így kapott fogalmi rendszer lényegében a másodrendű fázisátalakulások statisztikus fizikai leírásából származik; valójában egy kvantumtérelméletre mindig tekinthetünk úgy, hogy az egy diszkrét rácson megfogalmazott statisztikus fizikai rendszernek a renormálási csoport fixpontja környezetében érvényes leírását adja. Megfordítva, a statisztikus fizikai rendszert ilyenkor a kvantumtérelmélet regularizációjaként foghatjuk fel, és a fizikai mennyiségek függetlensége a regularizáció megválasztásától az ún. univerzalitásban jut kifejezésre.

A perturbált konform térelméleti leírás módot ad két igen hatékony közelítő módszer bevezetésére, amiket a 4. fejezetben tárgyalok. A fixpontban értelmezett kétdimenziós konform térelméletet ugyanis, annak nagyfokú szimmetriája miatt, igen sok esetben egzakt módon meg tudjuk oldani; ekkor érdemes a fixpontot deformáló releváns operátor csatolásában perturbációszámítást végezni a szokásos, szabad térelméletből induló kifejtés helyett. Ez a konform perturbációszámítás, ami kis térfogatban ad megbízható eredményt. Másrészt azonban amennyiben variációs problémaként tekintünk a spektrum meghatározására, akkor a csatolási állandóban (illetve a térfogatban) nemperturbatív közelítést kapunk. Ez a csonkolt konform állapotter közelítés, amelynek továbbfejlesztéséhez és kiterjesztéséhez számos saját eredményem fűződik. Előnye, hogy minden olyan elméletben alkalmazható, amikor a perturbáló operátor releváns, és ilyen módon nem függ az elmélet integrálhatóságától; nemintegrálható $1 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletek tanulmányozására jelenleg ez a leghatékonyabb eszköz, alkalmazásának csak a rendelkezésre álló számítási kapacitás szab határt (ennyiben hasonlítható a rács térelmélethez, de a $3 + 1$ dimenziós rács számításokhoz képest jóval nagyobb pontosságot tesz lehetővé). Azt is látni fogjuk, hogy a módszer kitűnően használható integrálható rendszerek tanulmányozására is, pl. az egzakt S mátrix elméletből vagy más módszerekkel adódó sejtések ellenőrzésére, illetve konkrét kérdések eldöntésére. Az integrálható rendszerekben az egzakt eredményeket ugyanis legtöbbször olyan megközelítésben kapjuk, amikor az elmélet konkrét Lagrange-függvénye, dinamikája csak nagyon áttételes szerepet játszik. Éppen ezért nagyon fontos az egzakt eredmények (amik emiatt mindig csupán sejtések) és a konkrét kvantumtérelmélet közti kapcsolat megteremtése, amiben a végesméret effektusok tanulmányozása döntő szerepet játszik, és a csonkolt konform állapotter közelítés a jelenleg létező leghatékonyabb numerikus eljárás.

Amennyiben a rendszer integrálható, a végesméret spektrum egzakt módszerekkel is tanulmányozható (5. fejezet). A Bethe-Yang egyenletek (a kétrészecske állapotokra Lüscher által adott leírás természetes általánosítása) lehetővé teszik sokrészecske állapotok végesméret korrekcióinak $1/L$ sorfejtésének minden rendjében egzakt leírását (de elhanyagolják azokat a korrekciókat, amelyek a térfogattal exponenciális csengenek le). Egy másik, minden szempontból egzakt leírást ad a termodinamikai Bethe Ansatz módszere. Harmadik lehetőség a Destri-de Vega-féle fénykúpács regularizáción alapuló komplex nemlineáris integrálegyenlet módszere, amit külön

tárgyak a 6. fejezetben, mivel ennek kifejlesztéséhez számos hozzájárulást tettem, és ennek kapcsán részletesen ismertetem saját eredményeimet.

A fentiek mind a végesméret effektusok alaposabb megértését célozzák, a 7. fejezetben viszont rátérek a kifejlesztett eljárások konkrét kvantumtérelméleti problémákra történő alkalmazására. Látni fogjuk majd, hogyan alkalmazhatók a vákuumok közötti alagúteffektus tanulmányozására, a ritka instanton gáz közelítéssel való összevetésre; hogyan ellenőrizhetők az egzakt S mátrix elmélet jóslatai a csonkolt konform állapotter segítségével, illetve hogyan számíthatók ki lokális operátorok várható értékei. Javaslok majd egy hatékony módszert fázisátalakulások rendjének és univerzalitási osztályának meghatározására is, és bemutatom alkalmazását a kétfrekvenciás sine-Gordon modellben. Megadom a véges térfogatbeli spektrum alapján a rezonanciák paraméterei meghatározásának egy újszerű módszerét, ami különösen alkalmas keskeny rezonanciák tanulmányozására. Itt röviden tárgyalom majd, hogyan általánosíthatók ezek az eredmények realiztikus ($3 + 1$ dimenziós) téridőn definiált modellek esetére. Végül pedig az imagináriusan csatolt affin Toda térelméletek és a perturbált minimálmodellek konzisztenciáját (unitaritás, illetve spektrum valósága) elemzem, az ennek során kapott eredményekkel hozzájárulva az ide kapcsolódó, máig eldöntetlen problémák felderítéséhez.

A periodikus határfeltételeken kívül definiálhatunk valódi peremfeltételeket is, amikor a rendszer ténylegesen nyílt, határfelületekkel körülvett térrészben van. Az ilyen modelleket peremes kvantumtérelméleteknek nevezzük, $1 + 1$ dimenzióban ez egy félvégteles egyenesnek vagy térbeli intervallumnak felel meg. A valóságban a véges térfogatú rendszerek mind ilyenek, periodikus határfeltételek csak elméleti konstrukcióként valósíthatók meg. Ilyen rendszereket tanulmányozok a 8. fejezetben, ahol először a Bethe-Yang egyenletek, majd pedig a csonkolt konform állapotter közelítés peremes kiterjesztését tárgyalom. Ezeket először is a peremes sine-Gordon elmélet tanulmányozására használok, ahol az egzakt S mátrix elmélet peremes megfelelője, az egzakt R mátrix elmélet, illetve a termodinamikai Bethe Ansatz módszer peremes kiterjesztése által megadott eredményeket ellenőrzöm. Ezután rátérek a klasszikus peremes sine-Gordon elméletre, aminek tanulmányozása elvezet Lüscher formalizmusának a peremes rendszer vákuumállapotaira történő kiterjesztéséhez. Külön tárgyalom az egyrészezske járulékok problémáját, amelynek kapcsán az irodalomban számottevő érdeklődés mutatkozott, ennek kapcsán igazolok egy Dorey és munkatársai által felvetett sejtést, mégpedig tetszőleges (nemcsak integrálható) kvantumtérelméltre kiterjesztve. Végezetül pedig ismét visszatérve $3 + 1$ (illetve tetszőleges) téridő dimenzióba, megmutatom, hogy a Casimir erő nem más, mint peremes végesméret effektus. Ennek a megközelítésnek újszerűsége abban rejlik, hogy a Casimir effektust nem a mikroszkopikus, hanem a nagy skálákon érvényes leírás felől közelíti meg, ezzel egyfelől mentes az ultraibolya divergenciáktól, másfelől tetszőlegesen kölcsönható kvantumtérelméletekre is természetes módon alkalmazható.

Végezetül a 9. fejezetben rövid összegzést és kitekintést adok: kapcsolódó problémákat, az eredmények lehetséges alkalmazásait, illetve jelenleg folyó kutatásokat vázolok.

Hogy az alapvető gondolatmenetet ne törjék meg, a szükséges háttérismereteket függelékbe rendeztem (ezek nem egy esetben saját eredményt, pl. a $\Phi_{1,5}$ perturbált minimálmodellek egzakt S mátrixát, vagy a csonkolt konform állapotter közelítéshez kifejlesztett eljárásokat is tartalmaznak). A dolgozat végén, az irodalomjegyzéket követően található tárgymutató segíti az eligazodást a fontosabb fogalmak között.

2. Periodikus határfeltételek: aszimptotikus viselkedés nagy és kis térfogatban

2.1. Nagy térfogat: vezető végesméret korrekciók

A nagy térfogatú határesetben a végesméret korrekciókat Lüscher jellemezte a 80-as évek közepén [Lus86a, Lus86b]. Eredményei szerint a vezető végesméret korrekciókat a végtelen térfogatban adott S mátrix (pontosabban annak analitikus elfolytatása) segítségével lehet kifejezni. A továbbiak megalapozása érdekében röviden felidézzük ezeket az eredményeket.

2.1.1. Tömegkorrekciók

Tegyük fel, hogy az elmélet spektruma az A_1, \dots, A_N (egyszerűség kedvéért skalár) részecskéket tartalmazza, amelyek tömege (végtelen térfogatban) $m_1 \leq \dots \leq m_N$ és $m_1 > 0$ (azaz nincs zérus nyugalmi tömegű gerjesztés), a részecskék energiája végtelen térfogatban pedig $\omega_a(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_a^2}$ alakban fejezhető ki a \vec{p} impulzus segítségével. A stabil egyrészecske állapotok végesméret korrekciója a tömeg térfogatfüggésével jellemezhető. $d + 1$ dimenziós euklidészi téridőben, amennyiben a térszerű dimenziók mindegyike egy L kerületű körre kompaktifikált

$$0 \leq x^i \leq L \quad , \quad i = 1, \dots, d$$

és periodikus határfeltételeket feltételezünk, a tömegspektrumot a kétpont függvények időirányban vett hosszútávú aszimptotikájából definiáljuk:

$$\langle \mathcal{O}_a(\tau) \mathcal{O}_a(0) \rangle_L \sim e^{-m_a(L)\tau} \quad \tau \rightarrow \infty$$

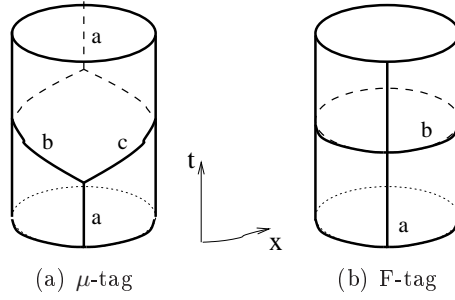
ahol $\tau = x^{d+1}$ az euklidészi idő koordináta és az \mathcal{O}_a lokális operátorok a részecskék interpoláló mezői, azaz végtelen térfogatban fennáll a

$$\langle 0 | \mathcal{O}_a(0) | A_b(\vec{p} = 0) \rangle = \sqrt{\frac{Z_a}{2}} \delta_{ab}$$

összefüggés, ahol Z_a az ún. hullámfüggvény renormálási állandó. (Az L alsó index a továbbiakban mindig a véges térfogatban definiált kvantumtérelméleti mennyiségekre – várható értékekre, állapotvektorokra – utal).

A fenti jelölésekkel az A_a részecske tömegének térfogatfüggését – feltételezve, hogy $m_a < 2m_1$, azaz A_a bomlása kinematikailag tiltott – vezető rendben a következő összefüggés adja meg [KM91]:

$$\begin{aligned} m_a(L) &= m_a + \Delta m_a^{(\mu)}(L) + \Delta m_a^{(F)}(L) + O(e^{-\sigma_a L}) \\ \Delta m_a^{(\mu)}(L) &= -\frac{d}{4m_a^2} \sum_{b,c} \theta(m_a^2 - |m_b^2 - m_c^2|) \lambda_{abc}^2 \int \frac{d^{d-1} q_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{-L\sqrt{q_\perp^2 + \mu_{abc}^2}}}{2\sqrt{q_\perp^2 + \mu_{abc}^2}} \\ \Delta m_a^{(F)}(L) &= -\frac{d}{2m_a} \sum_b \int \frac{d^{d-1} q_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \mathcal{P} \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{e^{-L\sqrt{(q^0)^2 + q_\perp^2 + \mu_{abc}^2}}}{2\sqrt{(q^0)^2 + q_\perp^2 + \mu_{abc}^2}} F_{ab} \left(-i\sqrt{\frac{m_a}{m_b}} q^0 \right) \end{aligned} \tag{2.1}$$



2.1. ábra. A (2.2) tömegkorrekció grafikus szemléltetése 1 + 1 dimenzióban

A jelölések a következők:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

\mathcal{P} pedig a főértékintegrált jelöli. Továbbá

$$\mu_{abc} = m_b \sin u_{ab}^c = m_a \sin u_{ac}^b = \frac{m_b m_c}{m_a} \sin u_{bc}^a$$

ahol a $0 \leq u_{bc}^a \leq \pi$ „fúziós szöget” az

$$m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 + 2m_b m_c \cos u_{bc}^a$$

egyenlet definiálja, F_{ab} a

$$A_a(\vec{p}) + A_b(\vec{q}) \rightarrow A_a(\vec{p}) + A_b(\vec{q})$$

folyamatot jellemző ún. előreszórási amplitúdó (ld. (A.4)) mint a

$$\nu = \frac{\omega_a(\vec{p}) \omega_b(\vec{q}) - \vec{p} \cdot \vec{q}}{\sqrt{m_a m_b}} = \sqrt{m_a m_b} \cosh \theta$$

kinematikai változó függvénye (θ az ún. rapiditás változó),

$$\lambda_{abc} = -M_{abc} \operatorname{Res}_{s=m_c^2} F_{ab}(\nu(s))$$

a tömeghéjon vett („on-shell”) szimmetrikus háromrészecske csatolás, ahol s a szokásos Mandelstam változó

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2\sqrt{m_a m_b} \nu$$

végül pedig M_{abc} 1, ha \bar{A}_c (A_c antirészecskéje) előáll b és c kötött állapotaként (ez a fizikai feltétele annak, hogy F_{ab} -nek a megfelelő helyen pólusa legyen), és 0 egyébként. λ_{abc} úgy is megkapható, mint az egyrészecske irreducibilis (1PI) vertexfüggvény tömeghéjon vett értéke

$$\begin{aligned} \lambda_{abc} &= \Gamma_{abc}(p_a, p_b, p_c) \\ p_a + p_b + p_c &= 0 \\ p_a^2 &= m_a^2, \quad p_b^2 = m_b^2, \quad p_c^2 = m_c^2 \end{aligned}$$

A hibára (az elhanyagolt magasabb rendű korrekciókra) jellemző σ_a együttható értéke függ attól, milyen vertexek léteznek az adott elméletben. $d > 1$ esetén és általános vertexeket feltételezve $\sigma_a = \sqrt{2}\mu_{a11}$, a részletes analízis tekintetében ld. [KM91].

1 + 1 dimenzióban (A.2 jelöléseit használva) a fenti formulák lényegesen leegyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} \Delta m_a(L) = & - \sum_{b,c} \theta (m_a^2 - |m_b^2 - m_c^2|) \mu_{abc} R_{abc} e^{-\mu_{abc} L} \\ & - \sum_b \mathcal{P} \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-m_b L \cosh \theta} m_b \cosh \theta \left(\mathcal{S}_{ab}^{ab} \left(\theta + i\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) + O(e^{-\sigma_a L}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahol

$$R_{abc} = -i \operatorname{Res}_{\theta = i u_{ab}^c} \mathcal{S}_{ab}^{ab}(\theta)$$

ha \bar{A}_c előáll A_a és A_b kötött állapotaként, egyébként pedig $R_{abc} = 0$. A fenti kifejezés fizikai jelentését a 2.1 ábra szemlélteti, ahol a vonalak az egzakt propagátoroknak, a vertexek az egzakt vertexfüggvényeknek feleltethetők meg; jól látható, hogy a vezető korrekció azon gráfok felösszegzésének felel meg, amelyekben pontosan egy hurok kerüli meg a hengert a (kompakt) térszerű irányban.

Lényeges tulajdonsága a tömegkorrekciónak, hogy a térfogat növekedésével exponenciálisan csökken (ez egyébként a tömeges Feynman propagátor térszerű irányban mutatott hasonló viselkedésének a következménye). Ha a végesméret korrekciókat $1/L$ szerinti sorfejtésben tekintjük, akkor a tömegkorrekció ebben a kifejtésben nem analitikus. Ez a későbbi megfontolásokban nagyon fontos szerepet játszik majd. Az is szembevetendő, hogy a korrekció kifejezésében a szórási amplitúdónak minden esetben a fizikai tartományon túlra történő elfolytatása szerepel, kiszámításához tehát az analitikus S mátrix elméletből ismert elfolytatásra van szükség.

2.1.2. Kétrészecske állapotok

A kétrészecske állapotokat Lüscher először az $1/L$ szerinti sorfejtésben vizsgálta [Lus86b]. A részletes formulák közlésétől itt most eltekintek, de a legfontosabb megállapításokat felidézem. Az $1/L$ -ben analitikus korrekciók minden esetben kifejezhetők a rugalmas kétrészecske szórási amplitúdóval, mégpedig a tömegkorrekciók esetétől eltérően ennek a fizikai tartományban felvett értékeivel. Ezenfelül az $1/L$ sorfejtés minden tagja a parciális hullám amplitúdók ún. küszöbparamétereivel, azaz a fizikai küszöbnél vett Taylor-együtthatóival fejezhető ki.

A későbbiek során sikerült egy olyan módszert találnia, amivel az $1/L$ -ben analitikus korrekciók elvileg egzakt módon kezelhetők [Lus91b]. A gyakorlati alkalmazás során azonban mindig egy olyan közelítést kell alkalmazni, amelynek során egy adott levágási értéknél magasabb per-dülethez tartozó parciális hullámok járulékát elhanyagoljuk.

Ez a korlátozás nem áll fenn 1 + 1 dimenzióban, mivel itt a Poincaré csoport kics csoportja triviális (nincsenek térbeli forgatások). Ennek megfelelően ha a részecskék a tömeget tekintve nem degeneráltak (vagyis nincsenek belső kvantumszámok), akkor a rugalmatlan küszöb alatt a szórást egyetlen fázistolással jellemezhető¹ (nincsenek parciális hullámok). A továbbiakban egyszerűség kedvéért erre az esetre szorítkozom.

A rugalmatlan folyamatok hiányában a hullámfüggvényre kirótt periodikus határfeltétel a következő egyenletekre vezet [Lus86b]:

$$\begin{aligned} e^{im_a L \sinh \theta_a} \mathcal{S}_{ab}(\theta_a - \theta_b) &= 1 \\ e^{im_b L \sinh \theta_b} \mathcal{S}_{ba}(\theta_b - \theta_a) &= 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

(a jelöléseket ld. A.2 alatt), amelyekből a két részecske rapiditása a térfogat függvényében meghatározható és az energiájuk kifejezhető mint

$$E = m_a \cosh \theta_a + m_b \cosh \theta_b$$

¹ Amennyiben integrálható kvantumtérelméletről van szó, akkor még az utóbbi feltételt sem kell kikötni, hiszen ebben az esetben nem léteznek rugalmatlan szórási folyamatok.

ahol a kétdimenziós kvantumtérelméletekben szokásos módon bevezettem az

$$S_{ab}(\theta_a - \theta_b) = S_{ab}^{ab}(\theta_a - \theta_b)$$

jelölést. Az 5.1 fejezetben megadom majd ennek egy leszármaztatását (és egyben általánosítását sokrészecske állapotok esetére) integrálható kvantumtérelméletekben.

A (2.3) egyenletek logaritmusát véve és kihasználva S_{ab} unitaritását a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} m_a L \sinh \theta_a + \delta_{ab}(\theta_a - \theta_b) &= 2\pi n_a \\ m_b L \sinh \theta_b - \delta_{ab}(\theta_a - \theta_b) &= 2\pi n_b \end{aligned}$$

ahol a fázistolást a

$$\delta_{ab}(\theta_a - \theta_b) = -i \log S_{ab}(\theta_a - \theta_b)$$

összefüggés definiálja, és n_a, n_b a lehetséges megoldásokat (kétrészecske állapotokat) jellemző kvantumszámok. Ennek egyik következménye, hogy

$$m_a \sinh \theta_a + m_b \sinh \theta_b = \frac{2\pi}{L} (n_a + n_b)$$

ami a teljes impulzus kvantálásának felel meg véges térfogatban. Másrészt ha $L \gg m_a^{-1}, m_b^{-1}$ akkor kihasználhatjuk a fázistolás viselkedését a küszöbnél

$$\delta_{ab}(0) = k\pi$$

ahol $k = 0$ vagy 1 lehet. Ennek megfelelően a részecskék impulzusai aszimptotikusan $1/L$ szerint zérushoz tartanak

$$\begin{aligned} m_a \sinh \theta_a &\sim \frac{2\pi}{L} \left(n_a - \frac{k}{2} \right) \\ m_b \sinh \theta_b &\sim \frac{2\pi}{L} \left(n_b + \frac{k}{2} \right) \end{aligned}$$

és ezért eléggé nagy térfogatban, amennyiben a kétrészecske állapotot a legkisebb tömegű részecske két példánya alkotja ($m_a = m_b = m_1$), az állapot energiája a rugalmatlan szórás küszöbe alatt marad. Ez lehetővé teszi ennek a formulának az alkalmazását nemintegrálható kvantumtérelméletekben is (magasabb dimenzióban is, pl. a QCD két-pion állapotaira [Lus86b]).

2.2. Kis térfogat: konform térelmélet

2.2.1. A nagy energiás viselkedés osztályozása $1+1$ dimenziós kvantumtérelméletekben

Egy tömeges kvantumtérelmélet nagy energiás (ultraibolya, UV) viselkedését a csatolási állandó futásától függően osztályozhatjuk, amit a

$$\frac{dg}{d \log \mu} = \beta(g)$$

egyenlet ad meg, ahol $\beta(g)$ az elmélet β függvénye (az egyszerűség kedvéért itt most csak egy csatolási állandót tételezek fel). Amennyiben $g = 0$ az elmélet ultraibolya vonzó fixpontja, akkor két lehetőség adódik:

1. Aszimptotikusan szabad. Ilyenkor a g csatolási állandó β -függvényének alakja

$$\beta(g) = -\beta_2 g^2 - \beta_3 g^3 + O(g^4)$$

ahol $\beta_2 > 0$, β_3 sémafüggetlen együtthatók. Nagy energián a csatolási állandó futása ilyenkor logaritmikus:

$$g(\mu) \sim \frac{1}{\beta_2 \log\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)}$$

Az ilyen elméletek véges térfogatbeli viselkedése jelenleg (a nagy térfogaton érvényes aszimptotikát leszámítva) kevésbé ismert.

2. Ultraibolya szabad. A β -függvény alakja ilyenkor

$$\beta(g) = -\beta_1 g + O(g^2)$$

Ilyenkor csak a β_1 együttható sémafüggetlen, és nagy energián a csatolási állandó futása hatványszerű:

$$g(\mu) \sim \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{-\beta_1} \quad (2.4)$$

Mindkét fenti esetben van egy (a renormálási sémától függő) Λ tömegskála, ami jellemzi az elméletet (dimenziós transzmütáció).

Abban az esetben, ha a β -függvény kis g -re pozitív, a csatolási állandó nagy energián növekszik. Ilyenkor is két eset lehetséges:

1. Van egy nemtriviális ultraibolya fixpont, ahol $\beta(g_*) = 0$ és amelyik ultraibolya stabil. Ekkor a csatolási állandót átdefiniálva $g' = g - g_*$ szerint az új g' csatolási állandóban a fenti két eset valamelyike áll elő, viszont az ultraibolya fixpont általában valamilyen nagyon nemtriviális kölcsönható konform térelmélet. Az így adódó két lehetséges viselkedés:
 - a) aszimptotikusan konform, ha $\beta'(g_*) = 0$. Ilyenkor az ultraibolya fixpont skálázó (konform) viselkedéséhez logaritmikus skálásértő korrekciók adódnak véges energián, hasonlóan a QCD-hez.
 - b) ultraibolya konform, ha $\beta'(g_*) \neq 0$. Ekkor a skálásértés az energia növelésével hatványszerűen tűnik el.
2. Ha nincs ultraibolya fixpont, akkor az elmélet csak véges ultraibolya levágás mellett érvényes, azaz (a Lüscher-Weisz-féle értelemben [LW87, LW88, LW89]) triviális. Ilyen elmélet nem tekinthető érvényesnek tetszőlegesen nagy energiáskáláig, ehelyett alacsony energiás effektív elméletként kezelendő.

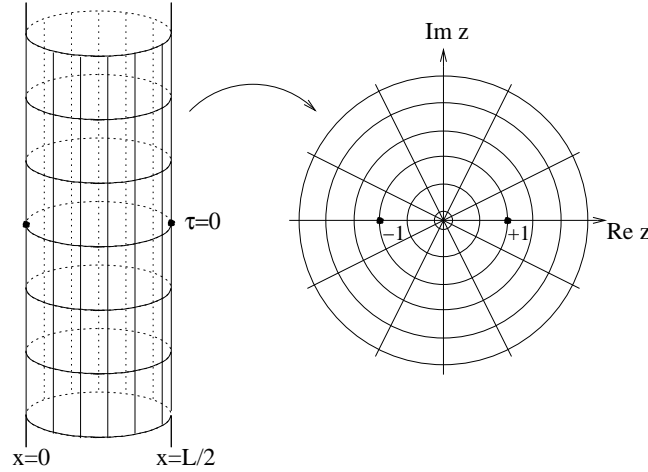
A továbbiakban felteszem, hogy az elméletnek létezik ultraibolya fixpontja, továbbá, hogy a csatolási állandót úgy választottuk meg, hogy a fixpont értéke $g_* = 0$. Ezenfelül csak azt az esetet tárgyalom részletesen, amikor $\beta'(g_*) > 0$, vagyis amikor az elmélet az ultraibolyában konform.

2.2.2. Végesméret effektusok kis térfogatban: konform térelméleti leírás

Az ultraibolya fixpontot skálainvariáns, relativisztikus kvantumtérelmélet írja le, abban az értelemben, hogy a korrelációs függvények rövidtávú (skálázó) aszimptotikus viselkedése egy ilyen elmélet korrelációs függvényeivel adható meg. A konform térelmélet itt szükséges alapvető fogalmairól a B függelékben adok rövid áttekintést.

A végesméret effektusok leírásához tekintsük a konform térelméletet egy hengeren, ahol az x térkoordináta L periódussal rendelkezik. Egy ilyen hengeren bevezethetjük a

$$\zeta = \tau - ix, \bar{\zeta} = \tau + ix$$



2.2. ábra. A henger leképezése a komplex síkra

komplex koordinátákat (ahol τ az euklidészi idő). Ez a henger a következő leképezéssel a teljes komplex síkba megy át (2.2 ábra):

$$z = \exp \frac{2\pi}{L} \zeta \quad , \quad \bar{z} = \exp \frac{2\pi}{L} \bar{\zeta} \quad (2.5)$$

A leképezés végtelenszer differenciálható, ezért ez egy konform transzformáció.

A hengeren definiált elmélet Hamilton operátora egyszerűen az időirányú eltolás

$$H = L_{-1}^{\text{cyl}} + \bar{L}_{-1}^{\text{cyl}}$$

ahol a cyl felső index a hengerre utal. Felhasználva a (B.2) összefüggést és a (B.3) móduskifejtést, a transzformáció elvégzése után H a következő alakot ölti:

$$H = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right) \quad (2.6)$$

ahol a felső index nélküli operátorok már a komplex síkon definiáltak. A síkon a rendszer Hilbert-tere ismert, és L_0 , \bar{L}_0 közös sajátvektorai feszítik ki. Az energia sajátértéke egy Δ_Ψ , $\bar{\Delta}_\Psi$ súlyokkal jellemzett Ψ állapotban tehát

$$E_\Psi(L) = \frac{2\pi}{L} \left(\Delta_\Psi + \bar{\Delta}_\Psi - \frac{c}{12} \right) \quad (2.7)$$

vagyis a konform elmélet spektruma véges térfogatban jellegzetes $1/L$ függést mutat, és az egyes szintek esetén ennek együtthatója közvetlenül megadja az adott energiaszint dilatáció alatti súlyát ($\Delta_\Psi + \bar{\Delta}_\Psi$). Az impulzus hasonlóképpen fejezhető ki

$$P = L_{-1}^{\text{cyl}} - \bar{L}_{-1}^{\text{cyl}} = \frac{2\pi}{L} (L_0 - \bar{L}_0)$$

és sajátértéke egy adott Ψ állapotban

$$P_\Psi(L) = \frac{2\pi}{L} (\Delta_\Psi - \bar{\Delta}_\Psi) \quad (2.8)$$

ami egyben azt is jelenti, hogy az állapotok ún. Lorentz vagy konform spinje ($\Delta_\Psi - \bar{\Delta}_\Psi$) egy lokális konform térelméletben csak egész értékeket vehet fel.

Az alapállapot a minimális súlyú primér térnek felel meg. A Lorentz-invariancia miatt ennek konform spinje csak zérus lehet, vagyis

$$\Delta_0 = \bar{\Delta}_0 = \Delta_{\min}$$

Ezzel az alapállapot energiája a következő alakba írható [CP88]

$$E_0(L) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6L}$$

ahol

$$c_{\text{eff}} = c - 24\Delta_{\text{min}}$$

az ún. effektív centrális töltés. Unitér konform térelméletben minden állapot súlya nemnegatív, így a minimális súlyú állapot maga a konform vákuum, vagyis $\Delta_{\text{min}} = 0$ és az effektív centrális töltés megegyezik c -vel.

Minden olyan elmélet esetén, amelyiknek létezik ultraibolya fixpontja, az energiaspektrum kis térfogatban érvényes aszimptotikus viselkedését az ultraibolya fixpontban érvényes konform térelmélet írja le a fentiekben részletezett módon. Ennek feltétele $L \ll 1/\Lambda$, ahol Λ az előzőekben bevezetett, a csatolási állandó futását jellemző energiaskála.

3. Perturbált konform térelméleti megközelítés

3.1. Relativisztikus kvantumtérelmélet mint egy konform térelmélet deformációja

A perturbált konform térelméleti keretben egy relativisztikus kvantumtérelmélet hatása megadható az ultraibolya fixpont konform térelmélethez tartozó hatás deformációjaként¹:

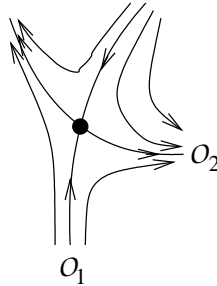
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{CFT}} - \int d^2x \sum_i g_i \mathcal{O}_i(x)$$

ahol az \mathcal{O}_i operátorokról feltesszük, hogy az ultraibolya határesetben homogénean transzformálódnak a dilatáció és a Lorentz transzformáció alatt, azaz határozott Δ_i , $\bar{\Delta}_i$ konform súlyokkal jellemezhetők (az ilyen operátorok teljes és az operátorszorzat kifejtésre nézve zárt rendszert alkotnak, ld. a B függelék). A relativisztikus invariancia megköveteli, hogy a perturbáló operátorok Lorentz spinje legyen zérus: $\Delta_i = \bar{\Delta}_i$. Ez a megközelítés különösen gyümölcsözőnek bizonyult integrálható térelméletek vizsgálatában [Zam89], de a dolgozat során látni fogjuk majd, hogy nemintegrálható esetben is sikerrel alkalmazható. Az egyszerűség kedvéért most egyparaméteres perturbációkra szorítkozom², azaz a hatás alakja

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{CFT}} - g \int d^2x \mathcal{O}(x)$$

a Hamilton operátor pedig

$$H = H_{\text{CFT}} + g \int dx \mathcal{O}(x) \quad (3.1)$$



3.1. ábra. Irreleváns (\mathcal{O}_1) és releváns (\mathcal{O}_2) perturbációk egy fixpont környezetében. A nyilak a renormálási csoportnak megfelelő (magasabb energiaskálától az alacsonyabb felé haladó) irányt jelölik.

Egyszerű dimenzióanalízis alapján meggyőződhetünk róla, hogy g dimenziója $[\text{tömeg}]^{2-2\Delta}$. Az elmélet β függvénye a legalacsonyabb rendben

$$\beta(g) = -(2 - 2\Delta)g + O(g^2)$$

¹ Itt a kétdimenziós esetre korlátozódom, bár elvileg ilyen megközelítés bármilyen téridő dimenzióban lehetséges. Azonban a kétdimenziós konform térelméletek nagyfokú szimmetriája jelentősen megkönnyíti a tárgyalást.

² A kétfrekvenciás sine-Gordon modell és a rezonanciák elemzése kapcsán szó lesz majd többparaméteres perturbációkról is.

alakú. A perturbáló operátor Δ dimenziójától függően a következő esetek lehetségesek (3.1 ábra):

1. $\Delta > 1$: ekkor a perturbáló operátort irrelevánsnak nevezzük (a másodrendű fázisátalakulások elméletéből kölcsönzött szóhasználat). Ilyenkor az ultraibolya határesetben a perturbáció a fixponttól eltaszítja a renormálási csoport folyamatot, hosszú távolságokon (infravörösben) pedig a perturbáció hatása eltűnik. Éppen ezért ezt infravörös fixpontok környezetének leírására lehet használni. Egy ilyen alkalmazást látunk majd 7.2.3 alatt a kétfrekvenciás sine-Gordon modell fázisátalakulásának tárgyalásakor.
2. $\Delta = 1$: ekkor három eset lehetséges, a β -függvény pontos viselkedésétől függően.
 - a) A β -függvény egzaktul eltűnik. Ekkor a perturbált elmélet konform invariáns marad. Az ilyen ún. marginális perturbációk a konform térelméletek ún. modulus terének feltérképezésénél játszanak szerepet.
 - b) A β -függvénynek a $g = 0$ ultraibolya stabil fixpontja. Ekkor a 2.2.1 alatti osztályzás szerint aszimptotikusan konform elmélettel van dolgunk.
 - c) A β -függvénynek a $g = 0$ infravörös stabil fixpontja. Ekkor ismét egy irreleváns perturbációról van szó, ami jelen esetben infravörösben lesz aszimptotikusan konform.
3. $\Delta < 1$: ekkor a perturbáció releváns, a 2.2.1 alatti osztályzás szerint az elmélet ultraibolya konform. Itt két esetet különböztethetünk meg³:
 - a) Tömegtelen folyamatok. Ekkor kis energián a β -függvény egy infravörös fixpontba folyik. Ez lehet perturbatív vagy sem, attól függően, mekkora az infravörös fixpontnak megfelelő g_* kritikus csatolás. A fixpont környékén az infravörös viselkedést egy konform térelmélet valamilyen irreleváns operátorokkal történő perturbációja írja le.
 - b) Tömeges folyamatok. Az effektív csatolás a skálával lefelé haladva minden határon túl nő, a hosszútávú viselkedés nem perturbatív. Az elmélet ilyenkor tömegréssel rendelkezik, és az alacsony energiás spektrum a tömeges kvantumtérelmélet eszközeivel kezelhető.

A jelen dolgozatban a 3. pont alatti esetekkel foglalkozom.

3.2. Konform perturbációszámítás: általános megjegyzések

Természetes ötlet a perturbált konform térelméleti megközelítésben, hogy a térelméleti mennyiségeket a g csatolási állandó szerint fejtsük perturbációs sorba. Pl. egy kétpont korrelációs függvény A. B. Zamolodchikov nyomán a következőképpen állítható elő [Zam91b] (euklidészi formalizmusban):

$$\langle \Phi(x)\Phi(0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int \langle \Phi(x)\Phi(0)\mathcal{O}(y_1)\dots\mathcal{O}(y_n) \rangle_{\text{CFT}} d^2y_1 \dots d^2y_n$$

Az egyes tagok a konform térelméleti korrelátorok segítségével állíthatók elő. Azonban ebben a naív megközelítésben kétféle divergenciával találkozhatunk:

1. Ultraibolya divergenciák. Ezek abból erednek, amikor a konform többpont függvényben két operátor pozíciója egymáshoz közel kerül. Amikor $\Delta < 1$, valamennyi ilyen divergencia az operátorok renormálásával eltávolítható. A $\Delta = 1$ esetben a g renormálása is szükséges. Ha $\Delta < 1/2$, akkor az $\mathcal{O}\mathcal{O}$ operátorszorzatokból nem jönnek ilyen divergenciák, az elmélet Hamilton operátora nem igényel renormálást. A $\Delta < 1$ esetben ilyen divergenciák csak egy véges n_{max} rendig fordulnak elő, azaz az elmélet a konform perturbációszámításban szuperrenormálható; az aszimptotikusan konform esetben pedig az elmélet a szokásos értelemben véve renormálható.

³ Ezt a két esetet természetesen a 2 (a) alatti aszimptotikusan konform elméleteknél is szét lehet választani.

2. Infravörös divergenciák. Ezek alapvető oka, hogy a konform korrelátorok tömegrés hiányában nagy távolságon nem csökkennek eléggé. A tömeges elmélet korrelátora a Wilson-féle operátorszorzat kifejtéssel a következőképpen állítható elő:

$$\langle \Phi(x)\Phi(0) \rangle = \sum_i C_i(x) \langle \Phi_i(0) \rangle$$

A perturbatív számolható mennyiségek az operátorszorzat kifejtésben szereplő $C_i(x)$ Wilson együttható függvények, a lokális operátorok várható értékei ellenben nemperturbatív, az infravörös tartományra (hosszútávú viselkedésre) jellemző mennyiségek, amelyeket a perturbációs számítás nem tud előállítani, és más megközelítésből kell venni ezeket inputként. Integrálható elméletben ezek sok esetben egzaktul ismertek [LZ97, FLZZ97, FLZZ98].

A perturbációs számítás fentebb vázolt infravörös viselkedése teljes mértékben analóg a perturbatív QCD-vel. A módszer részletes kifejtését ld. A. B. Zamolodchikov már idézett cikkében [Zam91b]. A konform perturbációs számítás megfogalmazható a végesméret korrekciók kis térfogatban történő kiszámítására is; ezt a 4.2 alfejezetben tárgyalom.

4. Közelítő módszerek a spektrum leírására véges térfogatban

A Lüscher által származtatott összefüggések, amelyekről a 2.1.1 fejezetben volt szó minden (tömeges) kvantumtérelméletben érvényesek. Ezek a végesméret effektusokra nagy térfogat esetén adnak kifejezést, mégpedig a végtelen térfogatban definiált spektrum és S mátrix segítségével, azaz az alacsony energiás (infravörös) fizika adatait használják inputként.

A következőkben két olyan közelítő módszert mutatok be, amelyek a perturbált konform térelmélet, azaz a nagy energiás (ultraibolya) leírás oldaláról közelítenek a problémához. Ezen módszereket az infravörös megközelítéssel összevetve megpróbálhatunk hidat verni a két leírás között, amit másképpen úgy fejezhetünk ki, hogy összekötjük az analitikus S mátrix elméletet a kvantumtérelmélet hamiltoni leírásával.

4.1. Konform perturbációs számítás

Ebben a fejezetben A. B. Zamolodchikov tárgyalását követem [Zam90]. A perturbált konform térelmélet (3.1) Hamilton operátora véges térfogatban a következő alakba írható:

$$H = H_{\text{CFT}} + g \int_0^L dx \mathcal{O}(x) \quad (4.1)$$

ahol feltesszük, hogy az \mathcal{O} tér primér (unitér elméletben ekkor lehet releváns). Az (euklidészi) téridő most egy L kerületű henger. Egy tetszőleges állapot energiáját g szerint a következő módon fejthetjük perturbatív sorba:

$$E_\Psi = E_\Psi^{\text{CFT}} - L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int \langle \Psi | \mathcal{O}(0) \mathcal{O}(x_2) \dots \mathcal{O}(x_n) | \Psi \rangle_{\text{cyl, conn}} d^2 x_2 \dots d^2 x_n$$

ahol a cyl index a henger téridőre, a conn pedig a korrelációs függvény összefüggő részére utal. A (2.5) leképezés és (B.1) felhasználásával ez a kifejezés átírható mint

$$E_\Psi = \frac{2\pi}{L} \left(\Delta_\Psi + \bar{\Delta}_\Psi - \frac{c}{12} \right) - L \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g^n}{n!} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2n(\Delta-1)+2} \int \langle \Psi | \mathcal{O}(1, 1) \mathcal{O}(z_2, \bar{z}_2) \dots \mathcal{O}(z_n, \bar{z}_n) | \Psi \rangle_{\text{conn}} \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{z_i \bar{z}_i} \right)^{\Delta-1} d^2 z_2 \dots d^2 z_n \right)$$

azaz

$$E_\Psi = \frac{2\pi}{L} \left(\Delta_\Psi + \bar{\Delta}_\Psi - \frac{c}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (gL^{2-2\Delta})^n \epsilon_n(\Psi) \right)$$

ahol az $\epsilon_n(\Psi)$ együtthatók egyszerűen kifejezhetők a konform korrelátorokkal és a $gL^{2-2\Delta}$ kifejezés a dimenziótlan kifejtési együttható. Ez konzisztens azzal, hogy releváns perturbáció ($\Delta < 1$) esetén várakozásunk szerint a kis L határesetben visszkapjuk a konform spektrumot, valamint azt is jelenti, hogy a fenti sorfejtés a kis L tartományban érvényes.

A perturbáció megsérti a skálainvarianciát: az így bevezetett skálát a $g^{1/(2-2\Delta)}$ mennyiséggel jellemezhetjük, ami összhangban van a csatolási állandó (2.4) alatt megadott futásával. Ezt

kifejezhetjük úgy is, hogy a konform perturbációs számítás ($\Delta < 1$ esetén, ld. lentebb) egy olyan renormálási sémát definiál, amelyben az egzakt β függvény

$$\beta(g) = -\beta_1 g \quad , \quad \beta_1 = 2 - 2\Delta$$

tehát az effektív csatolási állandó a releváns skála (jelen esetben $1/L$) $(2\Delta - 2)$ -ik hatványa szerint fut.

A végesméret spektrum konform perturbációs számítási kifejtésében infravörös divergenciák nem lépnek fel (a véges L térfogat jelenléte miatt). Ezzel szemben továbbra is fellépnek ultraibolya divergenciák, amennyiben $1/2 < \Delta$. Az $1/2 < \Delta < 1$ esetben ezek a kölcsönhatási Hamilton függvény additív renormálásával eltávolíthatók. Az ilyen ultraibolya divergenciákról megmutatható, hogy az energiaszintek különbségeinek kifejezéséből kiesnek, az ellentag nem más, mint az egységoperátor egy L -függő együtthatóval.

A $\Delta = 1$ esetben a csatolási állandót is renormálni kell, ennek következtében a fenti analízis nem helytálló, a naív várakozással ellentétben (miszerint a csatolási állandó nem fut) logaritmikus futást kapunk a 2.2.1 alatt tárgyaltaknak megfelelően.

Az alapállapot energiáját akkor kapjuk, ha Ψ helyébe a minimális konform súlyú Ψ_{\min} állapotot helyettesítjük. Ekkor a 2.2.2 alatti jelöléseket használva

$$E_0(L) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6L} + \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (gL^{2-2\Delta})^n \epsilon_n(\Psi_{\min})$$

Másrészt általános elvekből tudjuk, hogy nagy térfogaton

$$E_0(L) \sim BL$$

ahol B a vákuum energiasűrűsége (a statisztikus fizika nyelvén ez a lineáris viselkedés nem más, mint a szabadenergia extenzivitása). Amennyiben $\Delta < 1/2$ (nincsenek ultraibolya divergenciák) akkor ennek az értéke g függvényében jól definiált és dimenziós okokból

$$B = \mathcal{B}' g^{1/(1-\Delta)} \tag{4.2}$$

ahol \mathcal{B}' egy jól definiált, az elméletre jellemző dimenziótlan szám, amit vákuumenergia konstansnak nevezhetünk. A gerjesztett állapotok viselkedése nagy térfogatban hasonlóan alakul

$$E_{\Psi}(L) \sim BL$$

így a vákuumhoz viszonyított energiájuk

$$E_{\Psi}(L) - E_0(L)$$

nagy L -re konstans értékhez tart (egyrészecske állapotok esetén ez a részecskére jellemző tömeg, kétrészecske állapotok esetén pedig az állapotban jelenlevő részecskék tömegének összege), amint ezt Lüscher analíziséből (2.1 alfejezet) tudjuk.

A fejezet elején említett infravörös-ultraibolya összevetésre a konform perturbációs számítás önmagában nem alkalmas, mivel az érvényességi tartománya az L térfogat túl kis értékeire korlátozódik, ahol a Lüscher által származtatott kifejezések már nem adják meg kellő pontossággal az energiaszintek térfogatfüggését. Más módszerekkel, pl. a termodinamikai Bethe Ansatzzal kombinálva azonban fontos egzakt eredményeket lehet nyerni vele integrálható kvantumtérelméletekben, mint erről majd a TBA kapcsán 5.2 alatt röviden szót ejtek.

4.2. Konform variációszámítás: a csonkolt konform állapotter közelítés

A fentiekben ismertetett perturbatív megközelítés mellett lehetséges egy nemperturbatív, variációs módszer is. Ezt Yurov és Al. B. Zamolodchikov eredeti munkája [YZ90] alapján ismeretem. Ebben az esetben a perturbált elmélet állapotait a konform térelméleti állapotvektorokkal közelítjük. Idézzük fel ismét a konform Hilbert-tér szerkezetét (B függelék):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{V}_{\Delta_i} \otimes \mathcal{V}_{\bar{\Delta}_i}$$

Amennyiben a megengedett ábrázolások $(\Delta_i, \bar{\Delta}_i)$ legmagasabb súlyai diszkrét halmazt alkotnak, a (2.6) alatti véges térfogatbeli konform Hamilton operátor

$$H = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right)$$

spektruma diszkrét és alulról korlátos, hiszen a leszármaztatott szintek súlyai a legmagasabbtól csak pozitív egészben (az állapot szintje) térhetnek el. Amennyiben az $L_0 + \bar{L}_0$ sajátértéke szerint felülről levágjuk a Hilbert-teret, annak egy véges dimenziós alterét kapjuk, amit csonkolt konform állapotternek („truncated conformal space”, TCS) nevezünk:

$$\mathcal{H}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}) = \left\{ |\Psi\rangle \in \mathcal{H} : \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right) |\Psi\rangle = e |\Psi\rangle, e \leq e_{\text{cut}} \right\}$$

Innen ered a módszer neve is: csonkolt konform állapotter közelítés („truncated conformal space approach”, TCSA).

Mivel a perturbáció Lorentz-invariáns, ezért a különböző térszerű impulzussal rendelkező szektorok nem keverednek egymással, tehát értelmes ezt a Hilbert-teret további alterekre bontani a konform spin sajátértéke szerint:

$$\mathcal{H}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}, s) = \left\{ |\Psi\rangle \in \mathcal{H} : \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right) |\Psi\rangle = e |\Psi\rangle, e \leq e_{\text{cut}}, (L_0 - \bar{L}_0) |\Psi\rangle = s |\Psi\rangle \right\} \quad (4.3)$$

ahol $s \in \mathbb{Z}$. Egyes esetekben további megmaradó mennyiségek alapján még kisebb alterekre lehet bontani a levágott Hilbert-teret.

A perturbált elmélet véges térfogatú állapotait a $\mathcal{H}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}, s)$ állapotainak lineáris kombinációjaként előállítva, az együtthatókra történő standard kvantummechanikai variációszámítás arra vezet, hogy az energiaszintek közelítő meghatározásához a (4.1) Hamilton operátornak a $\mathcal{H}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}, s)$ altéren vett mátrixelemeiből alkotott mátrixot kell diagonalizálni.

Vegyük fel $\mathcal{H}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}, s)$ egy olyan $\{|\Psi_i\rangle, i = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}, s)\}$ bázisát, amelyen a konform Hamilton operátor diagonális¹:

$$\left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \right) |\Psi_i\rangle = \left(\Delta_i + \bar{\Delta}_i - \frac{c}{12} \right) |\Psi_i\rangle$$

Ez a bázis általában nem ortonormált, és gyakran nem is célszerű végrehajtani rajta a Gram-Schmidt ortogonalizációt. Jelöljük a belső szorzat mátrixát a következőképpen:

$$G_{ij} = \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle \quad (4.4)$$

A perturbáló Hamilton operátor

$$H_{\text{pert}}(t) = g \int_0^L dx \mathcal{O}(t, x)$$

¹ A konform térelmélet Hilbert-terének leszármaztatott állapotok szerinti rendezése mindig ilyen bázist ad.

mátrix elemeinek meghatározásához célszerű elvégezni a komplex síkra történő (2.5) exponenciális leképezést (B.1) felhasználásával. Ezzel az operátor mátrixelemei ($t = 0$ időpillanatban számolva²) a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned}\langle \Psi_i | H_{\text{pert}} | \Psi_j \rangle &= gL \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2\Delta} B_{ij} \delta_{s_i s_j} \\ B_{ij} &= \langle \Psi_i | \mathcal{O}(1, 1) | \Psi_j \rangle\end{aligned}\quad (4.5)$$

ahol $s_i = \Delta_i - \bar{\Delta}_i$ az i -edik állapot konform spinje, az erre vonatkozó kiválasztási szabályt az x szerinti integrál elvégzésével kapjuk, az L faktoriall együtt. Amennyiben egy határozott konform spinnel rendelkező altérben számolunk, a Kronecker δ elhagyható. Ahhoz, hogy ebből H_{pert} -nek a lineáris operátor értelemben vett mátrixát kapjuk az adott bázisban, be kell szoroznunk a G metrika inverzával (azaz át kell konvertálnunk az operátor mátrixának első indexét a duális bázisra). Végeredményképpen tehát a következő mátrixot kell diagonalizálni:

$$H_{ij}^{\text{TCS}} = \frac{2\pi}{L} \left\{ \left(\Delta_i + \bar{\Delta}_i - \frac{c}{12} \right) \delta_{ij} + \frac{gL^{2-2\Delta}}{(2\pi)^{1-2\Delta}} (G^{-1}B)_{ij} \right\} \quad (4.6)$$

Ezt az operátort a numerikus számítások céljából dimenziótlanítani kell. Amennyiben az elméletnek tömeges spektruma van, dimenziós alapon a legkönnyebb részecske tömege (m_1) a következőképpen hozható kapcsolatba a g csatolási állandóval:

$$g = \kappa m_1^{2-2\Delta} \quad (4.7)$$

ahol κ egy, az adott modellre jellemző dimenziótlan szám. Ezzel az összefüggéssel bevezethetjük az m_1 -hez rögzített egységrendszert, amelyikben az energiát m_1 , a távolságot m_1^{-1} egységeiben mérjük. Ezzel a dimenziótlan Hamilton mátrix a következő alakot ölti:

$$h_{ij}^{\text{TCS}} = \frac{2\pi}{l} \left\{ \left(\Delta_i + \bar{\Delta}_i - \frac{c}{12} \right) \delta_{ij} + \frac{\kappa l^{2-2\Delta}}{(2\pi)^{1-2\Delta}} (G^{-1}B)_{ij} \right\} \quad (4.8)$$

ahol

$$l = m_1 L$$

a dimenziótlanított térfogat. Ennek a sajátértékei (l függvényében)

$$e_i(l) = \frac{E_i(L = l/m_1)}{m_1}$$

alakban fejezhetők ki a fizikai $E_i(L)$ energiaszintekkel.

Integrálható kvantumtérelméletekben a κ állandó (például a következő fejezetekben ismerttetett termodinamikai Bethe Ansatz alkalmazásával) egzaktul kiszámítható. Nemintegrálható elméletekben κ onnan határozható meg, hogy a numerikusan kiszámított TCSA spektrumban a zérus konform spinű ($s = 0$) szektorban a tömegrest dimenziótlan egységekben egységnyire hangoljuk, azaz megköveteljük, hogy az első gerjesztett állapot és az alapállapot különbsége aszimptotikusan egyhez tartson:

$$e_1(l) - e_0(l) \rightarrow 1, \quad l \rightarrow \infty$$

Gyakran azonban (mint a később ismerttetett kétfrekvenciás sine-Gordon modellben) más skála választása bizonyul célszerűnek.

Amennyiben az elmélet spektruma az infravörös határesetben nem tömeges, akkor m_1 -nek az ultraibolya és infravörös közötti átmenet („crossover”) régió skáláját lehet választani, amit

² Egyszerűen látható, hogy a $t \neq 0$ időpillanatban vett Hamilton operátort a konform időfejlesztő operátorral történő hasonlósági transzformáció állítja elő a $t = 0$ időpontbeli Hamilton operátorból, így a spektrum független t megválasztásától.

valamilyen jellemző fizikai mennyiség segítségével lehet rögzíteni, de a jelen dolgozatban ilyen eljárást nem fogok alkalmazni.

Mint minden variációs módszer, a TCSA pontosságát is alapvetően az határozza meg, hogy mennyire fednek át az egzakt hullámfüggvények a csonkolt konform állapotter vektoraival. A térfogat növekedésével ez az átfedés romlik: egyre inkább nő a levágásnál magasabban fekvő állapotok súlya. Hasonlóan romlik a pontosság, ha egyre magasabban fekvő energiaszinteket tekintünk. A levágásból eredő ilyen hibákat csonkolási hibának („truncation error”) nevezzük. A csonkolási hiba becslésére jelenleg nem létezik elméleti úton származtatott eljárás, a gyakorlatban a levágást változtatva a spektrum megváltozásából becsülhető meg a levágástól való függés mértéke³.

Mivel ez a megközelítés ugyanazt a dinamikai rendszert kezeli (csak éppen variációs módszerrel), mint a konform perturbációs számítás, a 4.1 alfejezetben tárgyaltakhoz hasonlóan ultraibolya divergenciák lépnek fel, ha $\Delta > 1/2$. Azonban a divergenciák a relatív (alapállapothoz képest számított)

$$\tilde{e}_i(l) = e_i(l) - e_0(l)$$

energiaszintekből kiesnek, ezért ezek a függvények elvileg mérhetők, ám ekkor a felléú hibák jóval nagyobbak. A pontosságon ugyan lehet javítani a levágás növelésével, de az ultraibolya divergencia miatt a relatív energiaszintek számításakor két egyre nagyobb szám (a levágás növelésével elvben korlátos) különbségét kell venni, ami ugyancsak ront a módszer pontosságán. Általában is romlik a módszer konvergenciája Δ növekedésével, és a csonkolt állapotter dimenziója tipikusan exponenciálisan nő az e_{cut} növelésével. Ennek az exponensnek az értéke a modell c_{eff} effektív centrális töltésével arányos, ezért előny, ha c_{eff} megfelelően kicsi. Eddig a módszert $c_{\text{eff}} < 1$ (Virasoro minimálmodellek), $c = c_{\text{eff}} = 1$ (szabad bozon perturbációi) és $c = c_{\text{eff}} = \frac{3}{2}$ (szuper-szimmetrikus sine-Gordon esetén) sikerült megvalósítani, bár az utóbbi esetben már leginkább csak kvalitatív jellegű eredményeket kaptunk [BDP⁺04].

Nemperturbatív jellege miatt ez a módszer az energiaspektrumot számos modellben nagy térfogatértékekre is elég jó közelítéssel megadja. Amennyiben a vizsgált modell integrálható és az egzakt S mátrix ismert, az egyrészcseke és kétrészcseke állapotokhoz tartozó vezető végesméret korrekciók a 2.1 alfejezetben ismertetett módszerekkel egyszerűen kiszámíthatók. Az (2.2) egyrészcseke korrekciók TCSA-val történő egybevetését Klassen és Melzer végezte el [KM91], a (2.3) alapján számított kétrészcseke korrekciókat pedig számos más cikk, (a teljesség igénye nélkül) pl. [LMC91, Mus92a, KTW97], illetve több a jelenlegi dolgozatban később ismertetett munka tárgyalta, és minden alkalommal a különféle elméleti várakozásokkal összevetve nagyon jó egyezés adódott.

4.2.1. TCSA perturbált konform minimálmodellekben

A konform minimálmodelleket először Belavin, Polyakov és A. B. Zamolodchikov tárgyalta részletesen [BPZ84]. Ezek az elképzelhető legegyszerűbb nemtriviális konform térelméletek, mégis érdekesek, mert számos fontos statisztikus fizikai rendszer kritikus viselkedését ilyen modell írja le (pl. Ising és multikritikus verziói, háromállapotú Potts modell, illetve ennek trikritikus verziója, vagy az Ising modellben imaginárius mágneses térben fellépő Lee-Yang szingularitás).

Tekintsük az $\mathcal{M}_{p,q}$ konform minimálmodellt, ahol $p, q > 2$ két relatív prím egész szám. A modell centrális töltése

$$c = 1 - 6 \frac{(p - q)^2}{pq}$$

³ Itt jegyezzük meg, hogy a csonkolási hiba megbízható becslése egy, a levágásra alkalmazott renormálási csoport kifejtésével lehetséges, az első lépéseket ebben az irányban Feverati és munkatársai tették meg friss munkájukban [FGP⁺06]. Ennek segítségével lehetségesnek látszik továbbá a csonkolási hibák csökkentése a renormálási csoport felhasználásával, hasonlóan ahhoz, ahogy ezt a kvantumtérelméletekben a kovariáns perturbációs számítás, illetve a ráctérelmélet alkalmazásakor teszik.

és az állapottérben a Virasoro algebra ábrázolásai közül csak véges sok fordulhat elő, mégpedig a következő legmagasabb súlyokkal

$$\Delta_{r,s} = \frac{(ps - qr)^2 - (p - q)^2}{4pq} \quad , \quad r = 1, \dots, p-1 \quad , \quad s = 1, \dots, q-1$$

Ezek között fennáll a $\Delta_{r,s} = \Delta_{p-r,q-s}$ reláció, ezért az ezekhez tartozó ábrázolás azonos. A minimálmodellek csak akkor unitér kvantumtérelméletek (azaz rendelkeznek pozitív definit skalárszorozattal), ha $q = p + 1$.

A következőkben csak az ún. diagonális modellekkel foglalkozom, amelyek Hilbert-tere csak olyan modulokat tartalmaz, amelyekre $\Delta = \bar{\Delta}$:

$$\mathcal{H}_{\text{diag}} = \bigoplus_{\Delta \in \{\Delta_{r,s}\}} \mathcal{V}_{\Delta} \otimes \mathcal{V}_{\Delta}$$

ahol az összegzés során minden különböző $\Delta_{r,s}$ érték pontosan egyszer fordul elő (az unitér esetben ezek a modellek a kritikus Ising modell és multikritikus általánosításainak viselkedését írják le; $p = 3$ a szokásos Ising modell, $p = 4$ a trikritikus). Ezen elméletek primér tereit a konform súlyokkal azonos módon lehet indexelni: a $\Phi_{r,s}$ primér tér mindkét súlya megegyezik $\Delta_{r,s}$ -sel. A TCSA-val a valamelyik $\Phi_{r,s}$ térrel perturbált minimálmodell spektrumát lehet meghatározni: az ilyen modellt ezentúl a következőképpen fogom jelölni: $\mathcal{M}_{p,q} + \Phi_{r,s}$. Vegyük észre, hogy $\mathcal{M}_{p,q} + \Phi_{r,s}$ és $\mathcal{M}_{q,p} + \Phi_{s,r}$ egyszerűen azonosítható egymással.

Az első ilyen számítást Yurov és Al. B. Zamolodchikov végezte az ún. skálázó Lee-Yang modellben [YZ90], ahol igen kis dimenziójú altéren számolva⁴ sikerült az első néhány energiaszintet egy elég széles térfogattartományban ($0 \leq l \leq 30$) néhány ezrelékes pontossággal meghatározni. Ennek a sikernek az oka egyrészt az volt, hogy ennek az elméletnek a legkisebb az effektív centrális töltése az összes nemtriviális minimálmodell között ($c_{\text{eff}} = 2/5$), valamint a perturbáló operátor is erősen releváns ($\Delta = -1/5$).

A többi minimálmodell esetén jóval nagyobb dimenziós térre van szükség hasonló pontosság eléréséhez. A Lässig és Mussardo [LM91] által javasolt matematikai eljárás jelentős hátránya, hogy csak az L_{-1} operátorral történő leszármaztatást automatizálja. Az L_{-1} -gyel nem elérhető (ún. kváziprimér) állapotvektorokra a mátrixelemeket továbbra is kézzel kiszámolt külső inputként kell megadni, ezért csak az e_{cut} levágás kis értékeire alkalmazható, ami nagyon behatárolja a pontosságot és a tanulmányozható modellek körét.

Kausch-sal és Watts-szal a [KTW97] cikk munkái során kifejlesztettünk egy olyan módszert, ami teljesen automatizált, ennek megfelelően tetszőlegesen nagy levágásig skálázható, csak a rendelkezésre álló gépidő és memória mennyisége szab határt. Az eljárás lényegét a B.2, B.3 és B.4 alatt ismertetett, teljesen mértékben automatizálható számítási eljárások képezik, amik az eredetileg Kausch által **Maple** alá megírt szimbolikus konform térelméleti csomag jelentős mértékű továbbfejlesztésén alapulnak. Az algoritmust mind **Maple**, mind pedig **Mathematica** segítségével implementáltuk, és a későbbiek során ismertetett numerikus eredmények egy jelentős részét ezzel állítottam elő. Mivel azonban ezt az eljárást – bár azóta Watts is, magam is számos alkalommal használtuk – a mai napig nem publikáltuk, lényegét az alábbiakban ismertetem.

A csonkolt konform állapottér bázisát ($\mathcal{H}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}, s)$) úgy állítjuk elő, hogy a B.2 függelékben ismertetett módon megfelelően magas (e_{cut} által meghatározott) szintig elkészítjük az egyes \mathcal{V}_{Δ} modulok (B.17) szerinti bázisát, majd a diagonális Hilbert-térben szereplő tenzor szorzataikból

⁴ Az általuk használt $e_{\text{cut}} = 10$ mellett, a spin-0 szektorban mindössze 17, a spin-1 és 2-es szektorban pedig 12, illetve 9 dimenziós bázis adódik.

kiválogatjuk azokat a vektorokat, amik eleget tesznek a (4.3) egyenletben megadott feltételeknek. Ennek eredménye (B.2 jelöléseit használva) a következő bázis:

$$\text{Bas}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}, s) = \bigoplus_{\Delta \in \{\Delta_{r,s}\}} \bigcup_{k=0}^{N_{\Delta}(e_{\text{cut}}, s)} \text{Bas}_{k+s}(\Delta, c) \otimes \text{Bas}_k(\Delta, c)$$

ahol $N_{\Delta}(e_{\text{cut}}, s) = \left\lfloor \frac{e_{\text{cut}}}{2} - \Delta + \frac{c}{24} - s/2 \right\rfloor$

és $[x]$ az x egészrészét jelöli.

Ezután a B.3 és B.4 alatt ismertetett eljárásokkal kiszámítjuk a (4.6) Hamilton mátrixhoz szükséges G (4.4) és B (4.5) mátrixokat. Az \mathcal{O} perturbáló operátor tipikusan valamelyik $\Phi_{r,s}$ primér tér, mégpedig olyan, amelyik releváns is egyben ($\Delta_{r,s} < 1$). A mátrixelemek kiszámításához szükséges a primér terek közti hárompont csatolások ismerete, ez azonban Dotsenko és Fateev munkája [DF84, DF85] révén adott. Így a G és a B mátrix kiszámítása a bázis felírásához hasonlóan egy jól definiált algoritmikus probléma, amit teljes általánosságban meg lehet valósítani valamilyen szimbolikus algebra program segítségével írott programmal, erre alkalmas pl. a **Maple** vagy a **Mathematica**.

Abban az esetben, ha a vizsgált perturbáció integrálható, a g csatolási állandó és az m_1 tömegrés közti (4.7) relációban szereplő κ paraméter egzaktul ismert, Fateev munkája nyomán [Fat94] (a $\Phi_{1,3}$ perturbációkra már korábban Al. B. Zamolodchikov is meghatározta [Zam95]). Ugyaninnen ismert a (4.2)-ban definiált \mathcal{B}' vákuumenergia konstans is, ami helyett inkább a

$$B = \mathcal{B} m_1^2 \quad (4.9)$$

relációval definiált \mathcal{B} mennyiséget fogjuk a későbbiekben használni, amit az irodalomban univerzális vákuumenergia konstansnak („universal bulk energy constant”) neveznek. A kettő közti kapcsolatot

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \kappa^{1/(1-\Delta)}$$

adja meg.

A függelékben felsorolom a κ és \mathcal{B} paramétereket azokban a konkrét perturbált minimálmodellekben, amelyekre a dolgozat során szükség lesz: ezek a skálázó Lee-Yang modell (C.1.2) és a kritikus Ising modell mágneses térben (C.1.3).

4.2.2. TCSA a $c = 1$ szabad bozon releváns perturbációjára

Ennek kifejlesztése teljes mértékben saját eredményem, a módszer és kiterjesztései számos publikáció létrejöttében játszottak alapvető szerepet [FRT98b, FRT99, FRT98a, BPTW00, BPTW01, BPT01, BPT02a, BDP⁺04, TW06, PT06]. A lényeges felismerés, hogy a kompakt bozon állapotterében (ld. B.5.1) véges térfogatban a Hamilton operátor spektruma diszkrét, ezért ha bevezetjük a TCSA levágást, ismét egy véges Hilbert-tér adódik. Ennek bázisát nagyon egyszerű előállítani, mivel a (B.25, B.26) értelmében a módusok keltő operátorai azt teljesen szabadon generálják. Lentebb látni fogjuk, hogy a szóba jövő perturbáló operátorok csavarodási száma zérus, ezért a Hilbert-teret a konform spin mellett a csavarodási szám szerint is érdemes szektorokra osztani:

$$\mathcal{H}_{\text{TCS}}(e_{\text{cut}}, s, q) = \left\{ a_{-k_1} \dots a_{-k_r} \bar{a}_{-l_1} \dots \bar{a}_{-l_p} |n, m\rangle : \right. \\ \left. \left(\frac{n}{r} \right)^2 + \left(\frac{mr}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^r k_i + \sum_{i=1}^p l_i - \frac{1}{24} \leq e_{\text{cut}}, \right. \\ \left. s = nm + \sum_{i=1}^r k_i - \sum_{i=1}^p l_i, m = q \right\}$$

ahol az (n, m) párok valamelyik lokális algebrának megfelelő spektrumon (S_B vagy S_F) futnak végig, r pedig a bozontér B.5.1 alatt bevezetett kompaktifikációs sugarát jelöli.

Egy konkrét példa ilyen elméletre a sine-Gordon modell:

$$\mathcal{A}_{\text{sG}} = \frac{1}{2} \partial_\rho \Phi \partial^\rho \Phi + \mu : \cos \beta \Phi : \quad (4.10)$$

amire a módszert eredetileg kifejlesztettem. Figyelembe véve a Φ sine-Gordon tér és a (B.20) hatással definiált φ konform skalártér eltérő normálását

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \varphi$$

a perturbáló operátort a következő módon azonosítva

$$: \cos \beta \Phi := \frac{1}{2} (V_{k,0} + V_{-k,0})$$

a konform bozon kompaktifikációs sugarára a

$$r = k \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta} \quad (4.11)$$

kifejezés adódik. Mint látszik, ugyanaz a sine-Gordon modell több különböző konform Hilbert-térrel realizálható véges térfogatban, amiket (túl az S_B/S_F választáson) egy pozitív egész szám, a k „hajtogatási szám” („folding number”) indexel. Ez úgy értelmezhető, hogy bár a cosinus potenciál periódusa $2\pi/\beta$, a sine-Gordon teret csak

$$\Phi \equiv \Phi + k \frac{2\pi}{\beta}$$

által meghatározott periódusának tekintjük. Így véges térfogatban ugyanazon β paraméter mellett a sine-Gordon elméletnek végtelen sok változata jön létre [FRT98a], amiket k -szorosán hajtogatott sine-Gordon modellnek nevezünk [BPTW00]. A konform skalár m csavarodási számát a sine-Gordon modell topologikus töltésével lehet azonosítani.

A perturbáló operátor konform térelméletbeli súlya azonban k -tól függetlenül mindig

$$\Delta = \bar{\Delta} = \frac{\beta^2}{8\pi}$$

vagyis a perturbáció akkor releváns, ha $\beta^2 < 8\pi$. A felső határt az ún. Kosterlitz-Thouless pont adja; a $\beta^2 = 8\pi$ értéknél a sine-Gordon modell egy aszimptotikusan szabad modellel, az $SU(2)$ Gross-Neveu-modellel ekvivalens.

Megjegyzem, hogy a bozonikus (S_B) és a fermionikus (S_F) lokális algebra közti választás pontosan ekvivalens a sine-Gordon és tömeges Thirring modell közötti dualitással [KM93]. A tömeges Thirring modellt a

$$\mathcal{A}_{\text{mTh}} = \int d^2x \left(\bar{\Psi} (i\gamma_\nu \partial^\nu + m_0) \Psi - \frac{g}{2} \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi \right) \quad (4.12)$$

hatás definiálja, ahol Ψ egy Dirac fermion mező. Coleman [Col75] klasszikus eredménye, hogy a két modell a zérus topologikus töltésű szektorban ekvivalens, amennyiben a csatolási állandók között fennáll a

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + g/\pi}$$

reláció; ez az ekvivalencia kiterjeszthető az összes páros topologikus töltésű szektorra, hiszen ezek a két lokális algebrában teljesen azonosak. Már Klassen és Melzer is észrevette azonban [KM93],

hogy a sine-Gordon szoliton és a Thirring fermion nem feleltethető meg triviálisan egymásnak, mivel az egyikhez egy bozonikus dublett (a $V_{0,\pm 1}$ vertex operátorok által keltett állapotok), míg a másikhoz egy Dirac-fermion ($V_{\pm \frac{1}{2},\pm 1}$) tartozik, de a határfeltételek periodikusról antiperiodikusra cserélésével a kettő egymásra képezhető [FRT98a].

A TCSA konkrét kiszámításához tudnunk kell, hogyan számoljuk ki a vertex operátorok mátrixelemeit a bázisvektorok között; ennek módszerét B.6.1 alatt ismertetem. Ez adja a (4.6) TCSA Hamilton mátrix B összetevőjét; a G metrikára nincs szükség, mivel az általunk használt Fock bázis eleve ortogonális és könnyen ortonormálttá tehető. A dimenzióatlanítás az Al. B. Zamolodchikov [Zam95] által meghatározott következő összefüggés

$$\begin{aligned} \mu &= \kappa_\beta M^{2-2\Delta} \\ \kappa_\beta &= \frac{2\Gamma(\Delta)}{\pi\Gamma(1-\Delta)} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2-2\Delta}\right)\Gamma\left(\frac{\Delta}{4-2\Delta}\right)} \right)^{2-2\Delta}, \quad \Delta = \frac{\beta^2}{8\pi} \end{aligned} \quad (4.13)$$

alapján végezhető el, ahol M a sine-Gordon szoliton (egzakt kvantumos) tömege, így a térfogatot és az energiaértékeket M egységeiben mérhetjük. Az univerzális vákuumenergia konstans (M egységeiben)

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{4} \tan \frac{\pi}{2\lambda}, \quad \lambda = \frac{8\pi}{\beta^2} - 1 \quad (4.14)$$

A $c = 1$ elméletben megfelelő pontosság eléréséhez több ezer, esetenként 10-15 ezer dimenziós csonkolt konform állapotteret kell figyelembe venni. Ennek megfelelően a programok futtatására a szimbolikus algebra szoftverek már nem elég gyorsak, és memóriakezelésük sem eléggé hatékony. A sine-Gordon TCSA-t ezért C nyelven írott programmal automatizáltam; a későbbiek során megalkotott peremes és egyéb kiterjesztések fejlesztése is ezen a C programon alapult. Ezt megkönnyíti, hogy a bázis B.5.1 alapján nagyon egyszerűen konstruálható (nincsenek kifaktorizálandó szinguláris vektorok), és a kölcsönható Hamilton mátrix elemeire zárt kifejezés adható (ld. B.6.1. alatt), szemben a minimálmodellek esetén szükséges, B.3 és B.4 alatt ismertetett meglehetősen bonyolult rekurzív szimbolikus algebrai számítási módszerekkel.

5. Egzakt módszerek integrálható kvantumtérelméletekben

Szemben az eddigiek során ismertetett közelítő módszerekkel, $1 + 1$ dimenziós integrálható kvantumtérelméletekben a véges térfogatbeli spektrum egzakt módon is tanulmányozható. A következőkben a három legfontosabb ilyen módszert ismertetem.

A Bethe-Yang egyenletek valójában csak „félegzakt” leírást adnak, abban az értelemben, hogy a sokrészecske állapotok energiáját csak az $1/L$ -ben analitikus tagok erejéig adják meg, azaz minden a térfogattal exponenciálisan lecsengő járulékot elhanyagolnak.

A termodinamikai Bethe Ansatz egyenletek ellenben a vákuum (és megfelelően analitikus kiterjesztéssel a gerjesztett állapotok) energiáját az S mátrix ismeretében egzakt módon leírják. Hasonló igaz a Destri-de Vega egyenletre is, aminek a részletes tárgyalás miatt külön fejezetet szentelek.

5.1. Bethe-Yang egyenletek

A 2.1 fejezetben csak az egy-, illetve kétrészecske állapotok végesméret korrekcióiról volt szó. A 2.1.2 alfejezetben láthattuk, hogy a kétrészecske állapotok leírása különösen egyszerű $1 + 1$ dimenziós térelméletekben, ha az állapot energiája a rugalmatlan szórás küszöbe alatt van, és a szórás diagonális, azaz a részecskék között nincs tömegdegeneráció (nem tartoznak nemtriviális multiplettekbe), ebben az esetben ugyanis a rugalmatlan küszöb alatt a szórás egyetlen (energiafüggő) fázistolással jellemezhető.

Többrészecske állapotok esetén minden esetben a rugalmatlan szórás küszöbe feletti energiákról van szó, vagyis esély sem látszik hasonlóan egyszerű módszer származtatására. Integrálható térelméletekben azonban egyáltalán nincs rugalmatlan szórás, tehát ez nem jelent akadályt. Az alábbiakban bemutatom azt a módszert, amelynek segítségével integrálható térelméletekben bármilyen sokrészecske állapot $1/L$ -ben analitikus korrekciói egzaktul kiszámíthatóak, továbbá amellyel tetszőleges részecske multiplett struktúra is kezelhető. Ez a technika lényegében azonos az ún. Bethe Ansatzzal, ám míg a Bethe Ansatz az energiaszintekre egzakt eredményt ad, az alábbiakban tárgyalt egyenletek nem tartalmazzák az L térfogattal exponenciálisan lecsengő korrekciókat. Az irodalomban a módszer egy jó összefoglalását a [TW99, TW02] cikkek tartalmazzák, az ezekben található tárgyalást vesszük alapul a továbbiakban.

5.1.1. Sokrészecske állapotok végesméret korrekciói nemdiagonális szórás esetén

Tegyük fel, hogy egy kétrészecske állapotot egy m_A és egy m_B tömegű részecske alkot, amelyek lehetnek valamilyen belső szimmetriának megfelelő multiplettek tagjai, tehát rapiditásuk mellett egy belső kvantumszámmal is rendelkeznek. Jelölje a két részecskét $A_a(\theta_A)$ és $B_b(\theta_B)$, ahol θ_A és θ_B a rapiditások, a és b a belső kvantumszámok. Legyen $\psi(x_1, x_2)$ a kétrészecske hullámfüggvény, ami eleget kell tegyen a periodikus határfeltételnek:

$$\psi(x_1 + L, x_2) = \psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2 + L)$$

Amikor x_1 és x_2 messze van egymástól, akkor ψ síkhullámbázisban kifejezhető:

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{a,b} \psi^{ab}(\theta_A, \theta_B) |A_a(\theta_A) B_b(\theta_B)\rangle$$

(az integrálhatóság miatt csak olyan síkhullámok fordulhatnak elő, ahol a részecskék rapiditása az előre adott értéket veszi fel). A maximális távolság a két pont között L , ezért ennek a közelítésnek a pontossága $e^{-\mu L}$ nagyságrendű, ahol μ a kölcsönhatás hatótávolságát jellemző skála. Ha most az x_1 koordinátát körbeviszük a körön, akkor a hullámfüggvény egyrészt megszoródik a síkhullám fázisával, másrészt pedig a kétrészecske szórást jellemző S -mátrixszal, hiszen ekkor pontosan az történik, hogy a hullámfüggvény bejövő aszimptotikus tartományából a kimenőbe jutunk, valamint a részecskék relatív statisztikáját jellemző η_{AB} statisztikai faktorról (amely egy komplex fázis lehet, standard bozon/fermion részecskékre ± 1):

$$\psi_{ab} \rightarrow \eta_{AB} e^{im_A L \sinh \theta_A} S_{AB}(\theta_A - \theta_B)_{ab}^{a'b'} \psi_{a'b'}$$

Ezzel a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \psi_{ab} &= \eta_{AB} e^{im_A L \sinh \theta_A} S_{AB}(\theta_A - \theta_B)_{ab}^{a'b'} \psi_{a'b'} \\ \psi_{ab} &= \eta_{AB}^{-1} e^{im_B L \sinh \theta_B} S_{BA}(\theta_B - \theta_A)_{ba}^{b'a'} \psi_{a'b'} \end{aligned}$$

(a második egyenletet akkor kapjuk, ha a fenti megfontolást a másik részecskére végezzük el). Ez a két egyenlet konzisztens, ha a $S_{AB}(\theta)$ és $S_{BA}(-\theta)$ mátrixok felcserélnek egymással. Az egzakt S mátrixok elméletéből [ZZ79] ismert, hogy ennél sokkal szigorúbb feltételnek is eleget tesznek (ld. (C.1)):

$$S_{AB}(\theta) S_{BA}(-\theta) = 1 \quad (5.1)$$

azaz egymás inverzei. Ezért az állapotok a két mátrix közös sajátvektoraival fejezhetők ki, amiket jelöljünk $\psi_{ab}^{(i)}(\theta_A, \theta_B)$ -vel, $S_{AB}(\theta_A - \theta_B)$ ezen vektorhoz tartozó sajátértéke pedig legyen $s_{AB}^{(i)}(\theta_A - \theta_B)$. Az i -edik sajátvektorral rendelkező állapot azonban csak akkor oldja meg a fenti egyenleteket, ha θ_A és θ_B eleget tesznek az

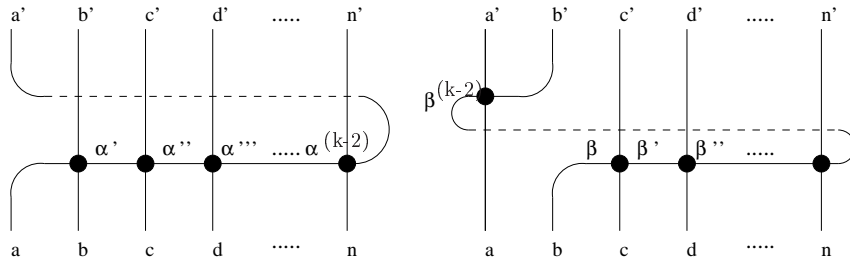
$$\begin{aligned} \eta_{AB} e^{im_A L \sinh \theta_A} s_{AB}^{(i)}(\theta_A - \theta_B) &= 1 \\ e^{i(m_A L \sinh \theta_A + m_B L \sinh \theta_B)} &= 1 \end{aligned}$$

egyenleteknek, amik a diagonális szórásra érvényes (2.3) egyenletek általánosításai, és triviális multiplett struktúra esetén azokra redukálódnak. Ha ezen egyenleteknek megtaláltuk egy megoldását, akkor az állapot energiáját

$$m_A \cosh \theta_A + m_B \cosh \theta_B$$

adja meg.

Ennek a módszernek az általánosítása tetszőleges számú részecskére teljesen nyilvánvaló. Legyenek k darab részecskénk, az A, B, \dots, N multiplettek tagjai, a, b, \dots, n belső indexekkel. Minden egyes részecskére külön elvégezhetjük a monodrómia operációt, amint azt az alábbi diagramokon az A és a B esetre illusztráltam, a C.1.1 fejezet grafikus jelöléseit alkalmazva:



Ennek eredményeként a hullámfüggvény monodrómiáját az egyes koordinátákban a következő ún. transzfer mátrixok jellemzik:

$$\begin{aligned} T_A(\theta_A, \theta_B, \dots, \theta_N)_{ab\dots n}^{a'b'\dots n'} &= S_{AB}(\theta_A - \theta_B)_{ab}^{\alpha b'} S_{AC}(\theta_A - \theta_C)_{\alpha c}^{\alpha'' c'} \dots S_{AN}(\theta_A - \theta_N)_{\alpha^{(k-2)} n}^{\alpha' n'} \\ T_B(\theta_A, \theta_B, \dots, \theta_N)_{ab\dots n}^{a'b'\dots n'} &= S_{BC}(\theta_B - \theta_C)_{bc}^{\beta c'} S_{BD}(\theta_B - \theta_D)_{\beta d}^{\beta'' d'} \dots S_{BA}(\theta_B - \theta_A)_{\beta^{(k-2)} a}^{\beta' a'} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (5.2)$$

A konzisztencia feltétele az, hogy ezek a mátrixok egymással felcseréljenek; ezt az egzakt S mátrix elméletben ismert Yang-Baxter egyenlet (C.5), valamint (5.1) biztosítja. Következésképpen ezek a mátrixok egyszerre diagonalizálhatók: szimultán sajátértékeiket jelölje $t_A^{(i)}(\theta_A, \theta_B, \dots, \theta_N)$, $t_B^{(i)}(\theta_A, \theta_B, \dots, \theta_N), \dots, t_N^{(i)}(\theta_A, \theta_B, \dots, \theta_N)$, ahol i a közös sajátvektorokat indexeli. Az i -edik sajátvektornak megfelelő állapotban megengedett rapiditásokat a következő egyenletek megoldása adja:

$$\begin{aligned} t_A^{(i)}(\theta_A, \theta_B, \dots, \theta_N) e^{im_A L \sinh \theta_A} &= \eta_{AB} \eta_{AC} \dots \eta_{AN} \\ t_B^{(i)}(\theta_A, \theta_B, \dots, \theta_N) e^{im_B L \sinh \theta_B} &= \eta_{BC} \dots \eta_{BN} \eta_{BA} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.3)$$

és ezen egyenletek megoldásának ismeretében az állapot energiája

$$m_A \cosh \theta_A + m_B \cosh \theta_B + \dots + m_N \cosh \theta_N$$

A (5.3) logaritmusát véve az

$$m_j L \sinh(\theta_j) - i \log t_j^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_k) = 2\pi I_j, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.4)$$

egyenleteket kapjuk, ahol $I_j \in \mathbb{Z} + \delta_j$ az ún. Bethe kvantumszámok, amelyek δ_j törtrészeit az η faktorok fázisa rögzíti. Ilyen módon egy sokrészcseke állapotot a sajátvektor i indexével és az I_1, \dots, I_k kvantumszámokkal jelölhetünk meg, általában egyértelmű módon, feltéve, hogy a logaritmus ágát konzisztensen választjuk meg.

5.1.2. Sokrészcseke állapotok végesméret korrekciói kink elméletekben

Amennyiben a gerjesztések nem a hagyományos sokrészcseke állapotokba, hanem ún. kink állapotokba szervezhetők (ld. C.1.5), akkor a fenti transzfer mátrix megfogalmazást ennek megfelelően általánosítani kell. Az egyszerűség kedvéért most csak egyetlen, m tömegű kink multiplettet teszünk fel, mivel a későbbiekben úgyszólván csak ilyen alkalmazás fordul majd elő. Periodikus határfeltételek mellett egy N -kink állapot

$$|K_{a_1 a_2}(\theta_1) K_{a_2 a_3}(\theta_2) \dots K_{a_n a_{n+1}}(\theta_n)\rangle$$

eleget kell tegyen az $a_1 = a_{n+1}$ feltételnek. Elvégezve az előzőekben ismertetett monodrómia műveletet a k -edik kinkre, a következő amplitúdót kapjuk a többi kinken való szórásra [KM92]:

$$T_k(\theta_1, \dots, \theta_n)_{a_1 a_2 \dots a_n}^{b_1 b_2 \dots b_n} = \delta_{a_k}^{b_{k+1}} \prod_{j \neq k} S_{b_j a_j}^{a_{j+1} b_{j+1}}(\theta_k - \theta_j)$$

ahol $a_{n+1} \equiv a_1$ és $b_{n+1} \equiv b_1$, és az ismétlődő indexekre itt nem értünk összegezést. Ezzel a hullámfüggvény periodicitásának feltétele a következőképpen írható:

$$e^{imL \sinh \theta_k} T_k(\theta_1, \dots, \theta_n)_{a_1 a_2 \dots a_n}^{b_1 b_2 \dots b_n} \psi^{a_1 a_2 \dots a_n} = (-1)^F \psi^{b_1 b_2 \dots b_n}, \quad k = 1, \dots, n$$

ahol $(-1)^F$ a kinek relatív statisztikájától függő fermion-szám faktor, és az ismétlődő indexekre ezúttal összegzés áll fenn. Az előzőekben tárgyaltakhoz hasonlóan a T_k transzfer mátrixok is kommutálnak¹, így szimultán diagonalizálhatók; legyenek a közös sajátvektoraik $\psi^{(i) a_1 a_2 \dots a_n}$, az ezekhez tartozó sajátértékeik $\lambda_k^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_n)$. Ekkor a rapiditásokra vonatkozó kvantálási feltételek:

$$e^{imL \sinh \theta_k} \lambda_k^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_n) = (-1)^F, \quad k = 1, \dots, n$$

és az állapot energiáját

$$m \sum_{k=1}^n \cosh \theta_k$$

adja meg.

¹ Ez a (C.16) és (C.20) alatti tulajdonságok következménye.

5.2. Termodinamikai Bethe Ansatz

A termodinamikai Bethe Ansatz módszerét először A. B. Zamolodchikov alkalmazta $1 + 1$ dimenziós integrálható kvantumtérelméletek leírására [Zam90]. A módszernek mára kiterjedt irodalma van, de a jelen dolgozatnak nem célja a részletes tárgyalás, ezért csak olyan mélységben ismertetem, amennyire a későbbiek megértéséhez szükséges.

A következőkben ezért a diagonális szórás esetére szorítkozom. Tételezzük fel, hogy az elmélet spektruma az A_1, \dots, A_n részecskéket tartalmazza, nemdegenerált m_1, \dots, m_n tömegekkel. Legyen az $A_i(\theta_1)$ és $A_j(\theta_2)$ részecskék egymáson szóródásakor fellépő S mátrix amplitúdó $S_{ij}(\theta_1 - \theta_2)$ (amit ismertnek tételezünk fel). Ekkor a véges L térfogatban a vákuum energiáját a

$$E_0(L) = - \sum_{i=1}^n m_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} \cosh \theta \log \left(1 + e^{-\epsilon_i(\theta)} \right)$$

alakban állíthatjuk elő, ahol az $\epsilon_i(\theta)$ ún. pszeudoenergia függvények a

$$\epsilon_i(\theta) = m_i L \cosh \theta - \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \phi_{ij}(\theta - \theta') \log \left(1 + e^{-\epsilon_j(\theta')} \right)$$

termodinamikai Bethe Ansatz (TBA) egyenletek megoldásai ahol a ϕ_{ij} magfüggvények az S_{ij} amplitúdók logaritmikus deriváltjai:

$$\phi_{ij}(\theta) = -i \frac{d}{d\theta} \log S_{ij}(\theta)$$

A fenti egyenletek lezármaztatását ld. Zamolodchikov idézett cikkében.

A TBA egyenleteket Bazhanov, Lukyanov és Zamolodchikov [BLZ97], valamint tőlük függetlenül Dorey és Tateo terjesztette ki tetszőleges gerjesztett állapot leírására [DT96, DT98]. Az irodalomban a TBA módszert számos nemdiagonális szóráselméletre is sikerült kiterjeszteni, azonban a hivatkozások nagy száma miatt ezek felsorolásától most eltekintek.

Fontos hangsúlyozni, hogy a módszer az egzakt energiaszinteket állítja elő, az előzőekben ismertetett Bethe-Yang egyenletekkel szemben az $1/L$ -ben nem analitikus végesméret korrekciókat is teljes mértékben figyelembe veszi. Ezt számos más megközelítéssel, többek között a Lüscher-féle (2.1 alatt ismertetett) formulákkal, a TCSA módszerrel és a következőkben ismertetendő Destri-de Vega egyenletekkel való összevetésben is igazolták. A TBA segítségével módszer adható a (4.7)-ban szereplő κ tömegrés konstans és a (4.9) alatti \mathcal{B} univerzális vákuumenergia konstans egzakt kiszámítására integrálható kvantumtérelméletekben [Zam90].

6. Destri-de Vega egyenletek

Az ebben a fejezetben tárgyaltak tulajdonképpen az előzőek szerves folytatását jelentik: a véges térfogatbeli spektrum egzakt leírásának egy másik módszeréről lesz szó, amit eredetileg Destri és de Vega javasolt [DdV92, DdV95]. A módszer az ún. XXZ modell fénykúp-rács változatából indul ki [DdV87], ami a sine-Gordon/tömeges Thirring kvantumtérelmélet integrálható regularizációja téridő rácson¹. Hasonló megközelítést alkalmazott Klümper, Batchelor és Pearce a kondenzált anyagok fizikájának keretében [KP91, KBP91]. Az eredeti változatában csak az alapállapotot leíró egyenletet írták fel, de nem sokkal később Fioravanti és munkatársai származtatták a megfelelő egyenleteket bizonyos egyszerű (csak azonos töltésű szolitonokat tartalmazó ún. multiszoliton) gerjesztett állapotokra [FMQR97]. Ezt követően Destri és de Vega vizsgálta az általános gerjesztett állapotokat leírását [DdV97], bár munkájukat számos pontatlanság jellemezte, aminek következtében a kvantumtérelmélettel való viszonya, legfőképpen az ultraibolya fixpont és a lokális kérdései tisztázatlanok maradtak.

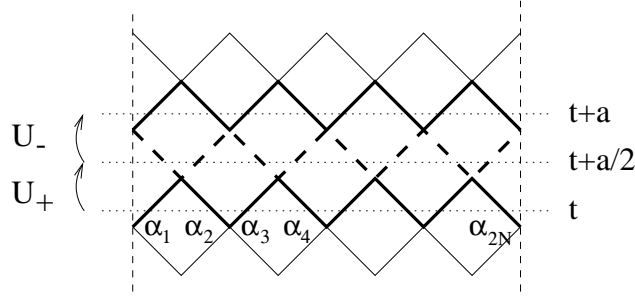
Pontosan ezen problémák motiválták a csonkolt konform állapotter módszer (TCSA) 4.2.2 alatt vázolt továbbfejlesztését, amelynek segítségével először sikerült a multiszoliton állapotok kvantálása és a lokális közti viszonyt tisztázni Feverati és Ravaninival együttműködve [FRT98b]. Erre az eredményre építve megadtuk a Destri-de Vega (továbbiakban DdV) egyenlet korrekt alakját és származtatását a rác regularizációból származó tetszőleges gerjesztett állapotra, az eredményt a TCSA-val összevetve is alátámasztottuk, és részletes leírását adtuk az infravörös és ultraibolya aszimptotikus viselkedésnek [FRT00].

A rác regularizáció csak olyan állapotokat ír le, amelyeknek topológiai töltése páros. Azonban észrevettük, hogy a páratlan állapotokra az egyenlet egyszerű módon kiterjeszthető [FRT98a] és ezzel sikerült megadnunk a pontos összefüggést a lokális algebra (B.27) szerinti bozonikus/fermionikus alakja és a kiterjesztett DdV egyenlet által leírt szektorok között. A lélegző állapotokat pedig [FRT00]-ban vizsgáltuk meg, ahol egyben megadtuk a minimálmodellek $\Phi_{1,3}$ perturbációjának leírását is, amelyek a sine-Gordon modell restrikciónaként állnak elő [Smi89, RS90].

Megjegyzem, hogy a Destri-de Vega egyenlet volt az első olyan megközelítés, amely képes volt a sine-Gordon modell teljes véges térfogatbeli spektrumának egzakt leírására, a gerjesztett állapotokat is beleértve. Balog János és Hegedűs Árpád [BH04b] munkájának eredményeként ma már ismert a megfelelő termodinamikai Bethe Ansatz leírás is, amelynek helyességét éppen az ebben a fejezetben ismertetett eredményekkel való összevetésben igazolták. Ugyancsak Balog János és munkatársai nevéhez kötődik a páratlan topológiai töltésű állapotokra vonatkozó kiterjesztett egyenlet által a véges térfogatbeli tömegrésre adott egzakt jóslat összevetése perturbatív és rácskérelméleti számításokkal [BKKW03, BKKW04].

A sine-Gordon modellt és a hozzá tartozó minimálmodelleket leíró eredeti DdV egyenlet az $a_1^{(1)}$ Kac-Moody algebrához rendelhető. Ennek az egyenletnek egy ADE kiterjesztését vákuumállapotra Mariottini adta meg [Mar96], P. Zinn-Justin [ZJ98] pedig felírta a gerjesztett állapotokhoz tartozó egyenleteket. Az $a_2^{(2)}$ esetre (az ún. Zhiber-Mikhailov-Shabat modellre) és a minimálmodellek ennek restrikciónaként előálló $\Phi_{1,2}/\Phi_{2,1}/\Phi_{1,5}$ perturbációira Dorey és Tateo adták meg a vákuum állapotot leíró egyenletet [DT00]. A Destri-de Vega egyenleteket kiterjesztették σ -modellekre [Heg05], a szuperszimmetrikus sine-Gordon modellre [Dun03, HRS07], illetve az ún. SS modellre [Heg04]; az itt tárgyalt munkánkból kiindulva számos eredmény

¹ Ezt az idézett cikkben egy olyan fermion operátor mező konstrukciójával igazolták, ami kielégíti a tömeges Thirring fermion mezőre vonatkozó (kvantum) mozgásegyenleteket.



6.1. ábra. Fénykúp rács 1 + 1 dimenzióban

született peremes kvantumtérelméletekre [AN04, ABR04, ABN⁺05, ANS06], illetve Feverati és munkatársai sikerrel alkalmazták a húrelméleti AdS/CFT korrespondencia keretében operátorok anomális dimenzióinak kiszámítására [FFGR06].

A Destri-de Vega egyenlet lényeges szerepet játszik a közönséges differenciálegyenletek és a Bethe Ansatz közötti, Dorey és Tateo által felfedezett összefüggésben is („ODE/IM”, azaz „Ordinary Differential Equations/Integrable Models” korrespondencia) [DT99], ennek részletes tárgyalásától, vagy akár csak a kiterjedt irodalom idézésétől itt most eltekintek, a legfrissebb összefoglaló munka [DDT04].

6.1. A DdV egyenlet származtatása

6.1.1. Fénykúp rács regularizáció

Ebben az alfejezetben a tömeges Thirring modell Destri és de Vega által bevezetett fénykúp rács regularizációját ismertetem (a részletek tekintetében ld. [DdV87]). Tekintsük az 1 + 1 dimenziós Minkowski téridő egy diszkretizációját a fénykúp irányok mentén, a (diagonális) rácsállandóval. A téridő geometriája legyen egy henger, $L = Na$ kerülettel, ahol N a rácspontok száma a térszerű irányban (6.1 ábra). Ezen a rácson egy inhomogén 6-vertex modellt definiálunk a következőképpen. A jobb/bal élek mentén Θ , illetve $-\Theta$ rapiditású csupasz részecskék propagálnak, amelyek egy részecske-antirészecske dublettet alkotnak, ± 1 töltéssel. A rácspontokban ezek a részecskék egymáson szóródnak, és eközben a töltés megmarad. A szórási amplitúdókat az ún. 6-vertex R -mátrix elemei adják:

$$\begin{aligned} R_{++}^{++}(\theta) = R_{--}^{--}(\theta) &= \frac{\sinh \frac{\gamma}{\pi} (i\pi - \theta)}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} (i\pi + \theta)} \\ R_{+-}^{+-}(\theta) = R_{-+}^{-+}(\theta) &= \frac{i \sin \gamma}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} (i\pi + \theta)} \\ R_{-+}^{+-}(\theta) = R_{+-}^{-+}(\theta) &= \frac{\sinh \frac{\gamma}{\pi} \theta}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} (i\pi + \theta)} \end{aligned}$$

Egy S megmaradó töltést definiálhatunk úgy, hogy egy adott időpillanatban összeadjuk a linkekhez rendelt ± 1 töltéseket, és az összeget osztjuk kettővel.

A fénykúp irányok menti időfejllesztő operátorok definiálják a H Hamilton és a P impulzus operátort:

$$U_{\pm} = e^{-i\frac{a}{2}(H \pm P)}$$

Bevezetve a

$$t^{(N)}(\theta, \{\Theta_i\}_{i=1, \dots, N})_{\beta_1, \dots, \beta_N}^{\alpha_1, \dots, \alpha_N} = \sum_{a_1, \dots, a_N} R_{a_1 \alpha_1}^{a_2 \beta_1}(\theta - \Theta_1) \dots R_{a_N \alpha_N}^{a_1 \beta_N}(\theta - \Theta_N) \quad (6.1)$$

ún. inhomogén transzfer mátrixot, $\Theta_i = (-1)^{i+1}\Theta$ választásával egyszerűen látható, hogy

$$\begin{aligned} U_L &= t^{(N)}(+\Theta, \{\lambda_i\}) \\ U_R^{-1} &= t^{(N)}(-\Theta, \{\lambda_i\}) \end{aligned}$$

A (6.1) transzfer mátrixok egymással a θ minden értékére felcserélnek (rögzített Θ_i mellett), és egy ún. inhomogén XXZ spinláncot definiálnak, amelynek spektruma az algebrai Bethe Ansatz keretében a következő Bethe egyenletek megoldásával állíthatók elő:

$$\left(\frac{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j + \Theta + \frac{i\pi}{2}] \sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j - \Theta + \frac{i\pi}{2}]}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j + \Theta - \frac{i\pi}{2}] \sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j - \Theta - \frac{i\pi}{2}]} \right)^N = - \prod_{k=1}^M \frac{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j - \theta_k + i\pi]}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j - \theta_k - i\pi]} \quad (6.2)$$

ahol θ_i , $i = 1, \dots, M \leq N$ az ún. Bethe gyökök. A fenti egyenleteket ezekre mint ismeretlenekre kell megoldani, minden egyes megoldásához a spektrum egy állapota tartozik, amelynek energiája és impulzusa a következőképpen adódik:

$$e^{ia(E \pm P)/2} = (-1)^M \prod_{j=1}^M \frac{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\Theta \pm \theta_j + \frac{i\pi}{2}]}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\Theta \pm \theta_j - \frac{i\pi}{2}]} + O(1) \quad (6.3)$$

Az XXZ leírásban az S töltés nem más, mint az állapot spinjének harmadik komponens, ami egy M gyökkel leírt Bethe állapotban éppen

$$S = N - M$$

6.1.2. A számláló függvény és a Bethe gyökök osztályozása

Az ún. számláló függvényt

$$\begin{aligned} Z_N(\theta) &= N[\phi_{1/2}(\theta + \Theta) + \phi_{1/2}(\theta - \Theta)] - \sum_{j=1}^M \phi_1(\theta - \theta_k) \\ \phi_\nu(\theta) &= i \log \frac{\sinh \frac{\gamma}{\pi} (i\pi\nu + \theta)}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} (i\pi\nu - \theta)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

definiálja, ahol (ahogy a továbbiakban mindig) a logaritmus függvény ágát az

$$-\pi < \Im m \log z \leq \pi$$

konvencióval rögzítjük, aminek megfelelően a vágást a negatív valós tengely mentén vesszük fel. Ennek segítségével a Bethe egyenletek átírhatók a

$$Z_N(\theta_j) = 2\pi I_j, \quad I_j \in \mathbb{Z} + \frac{1+\delta}{2}, \quad (6.5)$$

alakba, ahol $\delta = M \bmod 2 = 0$ vagy 1. A Bethe egyenletek periodicitása miatt elegendő a

$$|\Im m \theta| \leq \frac{\pi^2}{2\gamma}$$

tartományra korlátozódni.

A (6.2) Bethe Ansatzról a következő tények ismertek:

1. A gyökök száma csak $M \leq N$ lehet. Az alapállapotban $M = N$ és valamennyi gyök valós.
2. Gerjesztett állapotokban lehetnek olyan h_j pontok a valós egyenesen, amelyekre

$$e^{iZ_N(h_j)} = (-1)^{\delta+1}$$

de nem tartoznak a gyökök közé. Ezeket lyukaknak nevezzük, és számukat N_H -val jelöljük. Megmutatható, hogy ezek száma mindig csak páros lehet.

3. A gerjesztett állapotokban előfordulhatnak komplex gyökök, amelyek két osztályba sorolhatók:
- a) közeli gyökök c_j , $j = 1, \dots, M_C$, amelyekre

$$|\Im c_j| < \pi \min \left(1, \frac{\pi}{\gamma} - 1 \right)$$

- b) távoli gyökök w_j , $j = 1, \dots, M_W$, amelyekre $\pi \min \left(1, \frac{\pi}{\gamma} - 1 \right) < |\Im w_j| \leq \frac{\pi^2}{2\gamma}$
4. A komplex gyökök mindig komplex konjugált párokban jelennek meg, kivéve azokat a távoli gyököket, amelyekre

$$\Im w_j = \frac{\pi^2}{2\gamma}$$

miel ezek a periodicitás miatt önkonjugáltak.

$Z_N(\theta)$ a valós tengelyen valós, korlátos és folytonos, így bármilyen I_j -re, ami $Z_N(\theta)$ minimuma és maximuma közé esik (6.5) rendelkezik legalább egy megoldással, ami lehet valós gyök vagy lyuk. A valós x megoldásokat normálisnak nevezzük, ha $Z'_N(x) > 0$ és speciálisnak, ha $Z'_N(x) < 0$. Ha y speciális, akkor a hozzátartozó I kvantumszám degenerált, azaz létezik legalább még egy másik x valós megoldás ugyanazzal a kvantumszámmal:

$$Z_N(y) = 2\pi I = Z_N(x), \quad y \neq x$$

Ez annak a következménye, hogy $Z_N(\theta)$ (ha N elég nagy) mindig „globálisan növekvő” (azaz csak véges sok, külön-külön véges hosszúságú intervallumon csökkenhet). Ebből az is világos, hogy egy adott I kvantumszámhoz mindig páratlan sok megoldás tartozik.

6.1.3. A DdV egyenlet a rácson és a kontinuum határeset

A számlálófüggvényt átírhatjuk a következő alakba:

$$\begin{aligned} Z_N(\theta) = & N[\phi_{1/2}(\theta + \Theta) + \phi_{1/2}(\theta - \Theta)] - \sum_{j=1}^{M_R+N_H} \phi_1(\theta - x_j) + \sum_{j=1}^{N_H} \phi_1(\theta - h_j) \\ & + \sum_{j=1}^{M_C} \phi_1(\theta - c_j) + \sum_{j=1}^{M_W} \phi_1(\theta - w_j) \end{aligned} \quad (6.6)$$

ahol x_j az összes olyan hely a valós egyenesen, amire a (6.5) kvantálási feltétel teljesül (valós gyökök és lyukak együtt). A

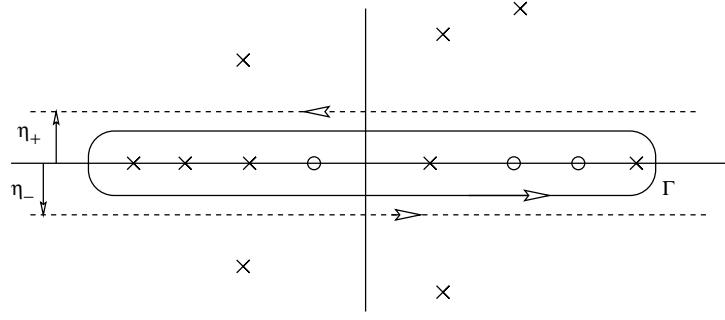
$$R_\delta^\pm(\theta) = \frac{(-1)^\delta e^{\pm i Z_N(\theta)} (\pm i) Z'_N(\theta)}{1 + (-1)^\delta e^{\pm i Z_N(\theta)}}$$

függvények azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy pontosan azokban a pontokban van pólusa (egységnyi reziduummal), amelyek eleget tesznek a (6.5) kvantálási feltételnek. Naívan $R_\delta^\pm(\theta)$ éppen a

$$\log \left(1 + (-1)^\delta e^{\pm i Z_N(\theta)} \right)$$

deriváltja, de óvatosan kell eljárni a logaritmus függvény ágainak megválasztásánál. Destri és de Vega a gerjesztett állapotokra vonatkozó levezetésében [DdV97] pontosan itt követ el hibát, emiatt a $\delta = 1$ esetre náluk nem a korrekt integrálegyenlet adódott.

Maga a levezetés ötlete egyszerű: használjuk fel a Cauchy-féle reziduum tételt a következő alakban

6.2. ábra. A Γ kontúr. A keresztek a gyököket, az üres körök a lyukakat szemléltetik.

$$\sum_{k=1}^{M_R+N_H} \phi'_1(\theta - x_k) = \oint_{\Gamma} \frac{d\rho}{2\pi i} \phi'_1(\theta - \rho) R_{\delta}^+(\rho)$$

ahol a Γ görbét a 6.2 ábra mutatja. Γ -től megköveteljük, hogy a $-\eta_- \leq \Im m\theta \leq \eta_+$ sávban legyen, ahol

$$0 < \eta_+, \eta_- \leq \frac{\pi}{2} \min\{1, \lambda^{-1}, |\Im m c_k|, k = 1, \dots, M_C\}$$

vagyis a sáv belsejében ne legyenek komplex gyökök. Minden további nélkül választható $\eta_+ = \eta_- = \eta$, és Γ a sáv határát alkotó két egyenesbe deformálható (a végtelenben ϕ'_γ eltűnik).

Az alsó kontúron

$$R_{\delta}^+(\theta) - R_{\delta}^-(\theta) = -iZ'_N(\theta)$$

segítségével átalakítjuk az integrált a következőképpen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi i} \phi'_1(\theta - \rho + i\eta) R_{\delta}^+(\rho - i\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi i} \phi'_1(\theta - \rho + i\eta) R_{\delta}^-(\rho - i\eta) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \phi'_1(\theta - \rho + i\eta) Z'_N(\rho - i\eta) \end{aligned}$$

A második tagban $\eta = 0$ -t helyettesíthetünk, és bevezetjük a K konvolúciós operátort a következőképpen

$$(K * Z'_N)(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \phi'_1(\theta - \rho) Z'_N(\rho)$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (1 + K) * Z'_N(\theta) &= N[\phi'_{1/2}(\theta + \Theta) + \phi'_{1/2}(\theta - \Theta)] + \sum_{j=1}^{N_H} \phi'_1(\theta - h_k) + \sum_{j=1}^{M_C} \phi'_1(\theta - c_j) \quad (6.7) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M_W} \phi'_1(\theta - w_j) - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \phi'_1(\theta - \rho - i\eta) R_{\delta}^+(\rho + i\eta) \\ &\quad + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \phi'_1(\theta - \rho + i\eta) R_{\delta}^-(\rho - i\eta) \end{aligned}$$

Az $1 + K$ konvolúciós operátor inverzével beszorozva, bevezetjük a

$$G(\theta) = \frac{1}{2\pi} ((1 - K)^{-1} * \phi'_1)(\theta)$$

függvényt, amely Fourier transzformáció segítségével expliciten kiszámítható:

$$G(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i\frac{\gamma}{\pi} k \theta} \frac{\sinh(\frac{\pi}{2} - \gamma)k}{2 \sinh \frac{(\pi - \gamma)k}{2} \cosh \frac{\gamma k}{2}} \quad (6.8)$$

Ezzel a következő eredmény adódik:

$$\begin{aligned}
Z'_N(\theta) = & N \left[\frac{1}{\cosh(\theta - \Theta)} + \frac{1}{\cosh(\theta + \Theta)} \right] + \sum_{i=1}^{N_H} G(\theta - h_i) - \sum_{i=1}^{M_C} G(\theta - c_i) \quad (6.9) \\
& - \sum_{i=1}^{M_W} G_{II}(\theta - w_i) - i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G(\theta - \rho - i\eta) R_{\delta}^+(\rho - i\eta) \\
& + i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G(\theta - \rho + i\eta) R_{\delta}^-(\rho - i\eta)
\end{aligned}$$

ahol és G_{II} a G függvény ún. második determinációja². Tetszőleges $f(\theta)$ függvény második determinációját a következőképpen definiáljuk:

$$f_{II}(\theta) = \begin{cases} f(\theta) + f(\theta - i\pi \operatorname{sign}(\Im m\theta)) & , 0 < \gamma < \pi/2 \\ f(\theta) - f\left(\theta - i\frac{\pi}{\gamma}(\pi - \gamma) \operatorname{sign}(\Im m\theta)\right) & , \pi/2 < \gamma < \pi \end{cases} \quad (6.10)$$

Most átírjuk az R_{δ}^{\pm} függvényeket

$$\log \left[1 + (-1)^{\delta} e^{\pm i Z_N(x \pm i\eta)} \right]$$

deriváltjaként, de óvatosan kell eljárunk, mert a speciális gyökök/lyukak melletti integrálás során a logaritmus függvény argumentuma áthalad a vágáson. Amennyiben $Z'_N(x) > 0$, akkor elegendően kis η értéket választva

$$\left| e^{\pm i Z_N(x \pm i\eta)} \right| \sim \left| e^{\pm i Z_N(x)} e^{-Z'_N(x)\eta} \right| < 1$$

és a logaritmus argumentuma nem kerül a negatív valós féltengelyen lévő vágásra; ellenkező esetben a vágáson bekövetkező ugrást is figyelembe kell venni. Ezzel a következő eredményre jutunk [FRT00]:

$$\begin{aligned}
Z'_N(\theta) = & N \left[\frac{1}{\cosh(\theta - \Theta)} + \frac{1}{\cosh(\theta + \Theta)} \right] + \sum_{i=1}^{N_H} 2\pi G(\theta - h_i) - \sum_{i=1}^{M_C} 2\pi G(\theta - c_i) \quad (6.11) \\
& - \sum_{i=1}^{M_W} 2\pi G_{II}(\theta - w_i) - \sum_{i=1}^{N_S} 4\pi G(\theta - y_k) \\
& - i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G(\theta - \rho - i\eta) \frac{d}{d\rho} \log \left[1 + (-1)^{\delta} e^{i Z_N(\rho + i\eta)} \right] \\
& + i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G(\theta - \rho + i\eta) \frac{d}{d\rho} \log \left[1 + (-1)^{\delta} e^{-i Z_N(\rho - i\eta)} \right]
\end{aligned}$$

ahol y_k a speciális lyukak/gyökök helyeit jelöli a valós tengelyen (a lyukak esetén ezt úgy értjük, hogy ugyanezek a pozíciók szerepelnek a h_i felsorolásban is), és a hozzájuk tartozó tag a logaritmus ugrásának járuléka. Ezt az egyenletet integrálva adódik:

$$\begin{aligned}
Z_N(\theta) = & 2N \arctan \frac{\sinh \theta}{\cosh \Theta} + \sum_{i=1}^{N_H} \chi(\theta - h_i) - \sum_{i=1}^{M_C} \chi(\theta - c_i) - \sum_{i=1}^{M_W} \chi_{II}(\theta - w_i) \quad (6.12) \\
& - \sum_{i=1}^{N_S} 2\chi(\theta - y_k) - i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G(\theta - \rho - i\eta) \log \left[1 + (-1)^{\delta} e^{i Z_N(\rho + i\eta)} \right] \\
& + i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G(\theta - \rho + i\eta) \log \left[1 + (-1)^{\delta} e^{-i Z_N(\rho - i\eta)} \right] + C
\end{aligned}$$

² A távoli gyökök esetén a konvolúcióban analitikusan folytatni kell a kontúr eltolásával a ϕ'_1 valós tengelyhez legközelebbi pólusán át, ennek járuléka eredményezi G_{II} megjelenését.

ahol

$$\chi(\theta) = 2\pi \int_0^\theta dx G(x) \quad (6.13)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{ik} e^{ik\theta} \frac{\sinh \frac{\pi(1-\lambda)k}{2\lambda}}{2 \sinh \frac{\pi k}{2\lambda} \cosh \frac{\pi k}{2}}$$

ahol $\lambda = \frac{\gamma}{\pi - \gamma}$ (6.14)

A C integrációs állandót úgy határozhatjuk meg, ha $Z_N(\theta)$ (6.4)-ből adódó aszimptotikus viselkedését összevetjük azzal, amit (6.12)-ből kapunk. Ebből kiderül, hogy C 2π egész számú többszöröse, amit nyugodtan elhagyhatunk, mert ez mindössze azt jelenti, hogy át kell definiálnunk az I_j Bethe kvantumszámokat (mégpedig éppen $\frac{C}{2\pi}$ levonásával).

A kontinuum határeset úgy adódik, hogy $a \rightarrow 0$ és $N \rightarrow \infty$, miközben az $L = Na$ térfogatot rögzítve tartjuk. A renormált tömegskála

$$M = 4a^{-1}e^{-\Theta}$$

amit a kontinuum határesetben ugyancsak rögzítünk. Ennek eredményeképpen a kontinuum határesetben $N \rightarrow \infty$, miközben a következő reláció áll fenn [DdV92]:

$$\Theta = \log \frac{4N}{ML}$$

Definiáljuk a kontinuum számlálófüggvényt a következőképpen:

$$Z(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} Z_N(\theta)$$

Itt fontos észrevenni, hogy az eredeti (6.2) Bethe Ansatz egyenleteken ez a határátmenet nem végezhető el, mivel azok csak N véges értékére definiáltak. Azonban a számlálófüggvénnyel felírt (6.12) integrálegyenlet már jól definiált marad. Azok az állapotok, amelyek ebben a határátmenetben értelmesek maradnak, úgy kaphatók meg, hogy egyben a valós gyökök számával is végtelenhez tartunk, és a vákuumállapottól való eltérést megadó lyukak és komplex gyökök számát tekintjük rögzítettnek. A $\Theta \rightarrow \infty$ azt jelenti, hogy a csupasz részecskék rapiditása is végtelenhez tart, ami egyenértékű azzal, hogy nyugalmi tömegük zérussá válik.

Ekkor

$$\begin{aligned} Z(\theta) = & l \sinh \theta + g(\theta|\theta_j) - i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G(\theta - \rho - i\eta) \log \left[1 + (-1)^\delta e^{iZ(\rho+i\eta)} \right] \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G(\theta - \rho + i\eta) \log \left[1 + (-1)^\delta e^{-iZ(\rho-i\eta)} \right] \end{aligned} \quad (6.15)$$

ahol $l = ML$ a dimenziótlantított térfogat, $g(\theta|\theta_j)$ az ún. forrástag

$$g(\theta|\theta_j) = \sum_{k=1}^{N_H} \chi(\theta - h_k) - 2 \sum_{k=1}^{N_S} \chi(\theta - y_k) - \sum_{k=1}^{M_C} \chi(\theta - c_k) - \sum_{k=1}^{M_W} \chi_{II}(\theta - w_k)$$

A forrástagban szereplő h_j , c_j , y_j és w_j pozíciókat a (6.5) kvantálási feltételek rögzítik, ahol a távoli gyökök esetén Z helyére a lentebb megadott Z_{II} második determinációt kell helyettesíteni.

Az energia és impulzus (6.3) kifejezését hasonló reziduum trükkal integrál alakba írhatjuk, és a kontinuum határátmenet elvégzése után a következő adódik:

$$E - E_{\text{bulk}} = M \left(\sum_{k=1}^{N_H} \cosh(h_k) - 2 \sum_{k=1}^{N_S} \cosh(y_k) - \sum_{k=1}^{M_C} \cosh(c_k) \right) + M \sum_{k=1}^{M_W} \cosh_{II}(w_k) + M 2\Im m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \sinh(\rho + i\eta) \log \left[1 + (-1)^\delta e^{iZ(\rho+i\eta)} \right] \quad (6.16)$$

$$P = M \left(\sum_{k=1}^{N_H} \sinh(h_k) - 2 \sum_{k=1}^{N_S} \sinh(y_k) - \sum_{k=1}^{M_C} \sinh(c_k) + \sum_{k=1}^{M_W} \sinh_{II}(w_k) \right) + M 2\Im m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \cosh(\rho + i\eta) \log \left[1 + (-1)^\delta e^{iZ(\rho+i\eta)} \right] \quad (6.17)$$

ahol az energiából levontam a (kontinuum határesetben divergens) L -ben lineáris ún. „bulk” tagot.

A (6.15) egyenlet a számlálófüggvényt csak az

$$|\Im m \theta| < \pi \min \left(1, \frac{\pi}{\gamma} - 1 \right) \quad (6.18)$$

elsődleges analiticitási tartományban állítja elő, ezt a Z első determinációjának nevezzük. Az ezen kívüli tartományra G szingularitásai miatt analitikus folytatással lehet meghatározni, az eredmény a Z függvény második determinációja, ami

$$Z_{II}(\theta) = l(\sinh \theta)_{II} + g_{II}(\theta|\theta_j) - i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G_{II}(\theta - \rho - i\eta) \log \left[1 + (-1)^\delta e^{iZ(\rho+i\eta)} \right] + i \int_{-\infty}^{\infty} d\rho G_{II}(\theta - \rho + i\eta) \log \left[1 + (-1)^\delta e^{-iZ(\rho-i\eta)} \right] \quad (6.19)$$

alakban állítható elő.

Ahhoz, hogy egy állapot energiáját mint L függvényét meghatározzuk, inputként ismerni kell a lyukak, közeli és távoli gyökök számát, és elő kell írni a hozzájuk tartozó Bethe kvantumszámokat. A speciális gyökök/lyukak megadása nem szükséges, mivel elég nagy l -re Z viselkedését az $l \cosh \theta$ tag dominálja ((6.15) integrátagja exponenciálisan kicsi), ezért ekkor Z mindig monoton növekszik, és speciális gyökök/lyukak nem fordulnak elő. Ezután (legalábbis elvileg) mindössze annyit kell tenni, hogy l -et fokozatosan csökkentve figyelni kell, hogy $Z'(\theta)$ mikor vált előjelet valamelyik valós gyök/lyuk pozíciójánál és ennek megfelelően kell bevezetni a speciális forrástagokat. Magukat az egyenleteket általában rendkívül gyorsan meg lehet oldani numerikusan egy olyan iteratív módszerrel, ami egyszerre iterál Z -re és a forrástagot meghatározó h_j , c_j , y_j és w_j pozíciókra³.

Végezetül megemlítjük, hogy a Z_N függvény aszimptotikus értékeit megvizsgálva összefüggést lehet találni a lyukak, komplex gyökök és speciális források száma, valamint az állapot spinje között, ami a kontinuum határesetben a következő alakot ölti [DdV97]:

$$N_H - 2N_S = 2S + M_C + 2\vartheta(\pi - 2\gamma)M_W \quad (6.20)$$

ahol

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Ezt számláló egyenletnek nevezzük.

³ Mindmáig megoldatlan probléma egy konvergens iterációs eljárás kifejlesztése arra az esetre, ha speciális források is jelen vannak.

6.2. Nagy térfogat (infravörös) határeset

A nagy térfogatú határesetben azt várjuk, hogy a véges térfogatú spektrumot leíró egyenletek átmennek az (5.4) Bethe-Yang egyenletekbe. Ez így is van, mivel $l \rightarrow \infty$ esetén a (6.15) egyenletben szereplő konvolúciós tag $O(e^{-l})$ és ezért elhagyható.

6.2.1. Csak lyukakat tartalmazó állapotok

Ekkor nagy l -re

$$\begin{aligned} Z(\theta) &= l \sinh \theta + \sum_{j=1}^{N_H} \chi(\theta - h_j) \quad , \quad Z(h_j) = 2\pi I_j \\ E - E_{\text{bulk}} &= M \sum_{j=1}^{N_H} \cosh h_j \\ P &= M \sum_{j=1}^{N_H} \sinh h_j \end{aligned} \quad (6.21)$$

adódik. Ugyanakkor

$$\chi(\theta) = -i \log S_{++}^{++}(\theta) \quad (6.22)$$

ahol $S_{++}^{++}(\theta)$ a sine-Gordon elmélet (C.11) alatt felírt szoliton-szoliton szórási amplitúdója, és az itt definiált λ paraméter éppen egybeesik a sine-Gordon modellnél hasonlóképpen jelölt mennyiséggel. Ennek megfelelően feltehetjük, hogy a kontinuum térelmélet a sine-Gordon modell, és ebben az esetben (6.21) a csak szolitonokat (vagy antiszolitonokat) tartalmazó állapotok Bethe-Yang leírását adja, a lyukak h_j pozíciói éppen a részecskék rapiditásának, az M tömegskála pedig a szoliton tömegének feleltethető meg. Ezenfelül pedig a teljes spin kétszerese a topológiai töltéssel azonosítható:

$$Q = 2S$$

6.2.2. Semleges kétrészecske állapotok

A semleges $s\bar{s}$ állapotok a hullámfüggvény paritása alapján egy $(s\bar{s})_+$ szimmetrikus és egy $(s\bar{s})_-$ antiszimmetrikus komponensre bonthatók. A Bethe-Yang transzfer mátrix azonos az S mátrix következő 2×2 -es blokkjával:

$$\begin{pmatrix} S_{+-}^{+-}(\theta_1 - \theta_2) & S_{-+}^{+-}(\theta_1 - \theta_2) \\ S_{+-}^{-+}(\theta_1 - \theta_2) & S_{-+}^{-+}(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

Ennek sajátértékei:

$$\begin{aligned} S_+(\theta) &= -\frac{\sinh\left(\lambda \frac{\theta+i\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\lambda \frac{\theta-i\pi}{2}\right)} S_{++}^{++}(\theta) \\ S_-(\theta) &= \frac{\cosh\left(\lambda \frac{\theta+i\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\lambda \frac{\theta-i\pi}{2}\right)} S_{++}^{++}(\theta) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Az S_+ amplitúdó pólusai a $\theta = i\pi(1 - 2k/\lambda)$, $k = 1, 2, \dots < \lambda/2$ a B_{2k} páros indexű lélegzőknek, míg az S_- $\theta = i\pi(1 - (2k + 1)/\lambda)$, $k = 1, 2, \dots < (\lambda - 1)/2$ pólusai a B_{2k+1} páratlan indexű lélegzőknek felelnek meg.

A következőkben egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\lambda < 1$, azaz (6.14) alapján $0 < \gamma < \pi/2$ (taszító tartomány). A (6.20) számláló egyenlet alapján a DdV egyenletnek ilyenkor két olyan semleges ($S = 0$) megoldása van, amelyben nagy térfogaton két lyukat találunk.

1. Két lyuk $(h_{1,2})$ és egy komplex pár $(\rho \pm i\sigma)$. A (6.12) infravörös határesetére a következő alakú:

$$\begin{aligned} Z(\theta) &= l \sinh \theta + \chi(\theta - h_1) + \chi(\theta - h_2) - \chi(\theta - \rho - i\sigma) - \chi(\theta - \rho + i\sigma) \\ Z(h_{1,2}) &= 2\pi I_{1,2}^\pm, \quad Z(\rho \pm i\sigma) = 2\pi I_c^\pm \end{aligned}$$

A (felső) komplex gyök kvantálási feltétele expliciten

$$l \sinh(\rho + i\sigma) + \chi(\rho + i\sigma - h_1) + \chi(\rho + i\sigma - h_2) - \chi(2i\sigma) = 2\pi I_c^+ \quad (6.24)$$

Ha $l \rightarrow \infty$, az első tagnak nagy imaginárius része lesz, amit a másik három tagnak kell kiegyenlítenie, mivel I_c^+ valós. Ez csak úgy lehetséges, ha $\sigma \rightarrow \frac{\pi}{2}$ mivel ekkor $\chi(2i\sigma)$ szingularitásához közelít ($\sigma < \pi$ kell hogy legyen egy közeli párra, és $\lambda < 1$ esetén χ -nek nincs más alkalmas szingularitása). Emlékezve arra, hogy

$$e^{i\chi(\theta)} = S_{++}^{++}(\theta)$$

és kihasználva azt a tényt, hogy $S_{++}^{++}(\theta)$ -nak $\theta = i\pi$ -ben elsőrendű zérushelye, nagy l -re vezető rendben a következőnek kell teljesülni:

$$l \cosh \rho + \Re e \log C \left(\sigma - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

(ahol C egy számunkra érdektelen konstans). Innen

$$\left| \sigma - \frac{\pi}{2} \right| \sim \exp(-l \cosh(\rho)) \quad (6.25)$$

vagyis a komplex gyök imaginárius része exponenciálisan gyorsan $i\frac{\pi}{2}$ -be tart.

Először tegyük fel azt, hogy

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pi}{2} - \epsilon \\ 0 < \epsilon &= O(e^{-l}) \end{aligned}$$

Ekkor vezető rendben a következőt kapjuk a kvantálás feltétel valós részére

$$\Re e \chi \left(\rho + i\frac{\pi}{2} - i\epsilon - h_1 \right) + \Re e \chi \left(\rho + i\frac{\pi}{2} - i\epsilon - h_2 \right) = 2\pi I_c^+$$

Felhasználva a következő azonosságot⁴

$$\xi(\theta) \equiv \Re e \chi \left(\theta + i\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{i}{2} \log \frac{\sinh \lambda \left(i\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sinh \lambda \left(i\frac{\pi}{2} + \theta \right)}$$

ahol ξ egy monoton korlátos függvény:

$$|\xi(\theta)| \leq |\xi(\infty)| = \frac{\pi(1-\lambda)}{2}, \quad |\Im m \theta| < \frac{\pi}{2}$$

kapjuk, hogy

$$|I_c^\pm| < \left| \frac{1-\lambda}{2} \right| < \frac{1}{2}$$

vagyis $I_c^\pm = 0$. Ekkor tehát a fenti állapot a (6.12) egyenlet $\delta = 1$ esetében írja le az aszimptotikát (egész Bethe kvantumszámok). A ρ -ra vonatkozó egyenlet megoldása

$$\rho = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

vagyis a komplex pár a két lyuk között félúton helyezkedik el.

⁴ A logaritmus ágát $\xi(0) = 0$ és ξ folytonosság egyértelműen rögzíti.

Ha ellenben

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\pi}{2} + \epsilon \\ 0 < \epsilon &= O(e^{-l})\end{aligned}$$

akkor a

$$\chi(\theta) + \chi(\theta - i\pi) = -i \log \frac{\sinh \lambda (i\pi - \theta)}{\sinh \lambda \theta}$$

azonosságot felhasználva

$$l \sinh(\rho + i\sigma) + \chi(\rho + i\sigma - h_1) + \chi(\rho + i\sigma - h_2) + i \log \frac{\sin \lambda (\pi - \sigma)}{\sin \lambda \sigma} + \chi(2i\sigma - i\pi) = 2\pi I_C^+$$

írható, és hasonló analízis után adódik, hogy

$$I_c^\pm = \mp \frac{1}{2}$$

vagyis ez a $\delta = 0$ esetben fennálló aszimptotikus megoldás. A

$$\rho = \frac{h_1 + h_2}{2}, \quad \sigma = i\frac{\pi}{2}$$

aszimptotikus értékeket a lyukak kvantálási feltételebe helyettesítve adódik, hogy

$$\begin{aligned}Z(h_1) &= l \sinh(h_1) - i \log S_+(\theta_1 - \theta_2) = 2\pi I_1 \\ Z(h_2) &= l \sinh(h_2) - i \log S_+(\theta_1 - \theta_2) = 2\pi I_2\end{aligned}$$

ahol $S_+(\theta)$ a (6.23) alatt szereplő első sajátérték. Ezzel beláttuk, hogy a két lyuk és egy komplex pár alkotta állapot (a taszító tartományban) azonosítható a szimmetrikus szoliton-antiszolon állapotokkal.

A fenti következtetések a vonzó tartományban is érvényesek, mindaddig, amíg $\lambda < 2$. $\lambda = 2$ -nél azonban a konfiguráció a (6.18) elsődleges analiticitási tartomány határába ütközik. Pontosabban ekkor jelenik ebben a szórési csatornában a B_2 kötött állapot. Az $(s\bar{s})_+$ állapot leírásához ilyenkor a komplex gyökök egy bonyolultabb konfigurációja válik szükségessé.

Az $(s\bar{s})_-$ állapot a fentiekhez hasonló megfontolások alapján egy két lyukat és egy önkonjugált gyököt tartalmazó konfigurációval azonosítható, ha $\lambda < 1$. $\lambda = 1$ -nél ebben a csatornában megjelenik a B_1 kötött állapot, és az $(s\bar{s})_-$ állapothoz egy másik konfiguráció tartozik.

A taszító tartományban a távoli gyökök leírása a fentiektől némileg különbözik. Mivel $\lambda < 1$ -re

$$\sinh_{II} \theta = \sinh \theta + \sinh(\theta - i\pi) = 0$$

ezért a távoli gyökök esetén nincs olyan exponenciális aszimptotika, amelyet fentebb láttunk. Azonban ebben a tartományban az összes komplex gyökre igaz, hogy csak lyukak jelenlétében létezhetnek, és konfigurációjukat a lyukaké egyértelműen determinálja, azaz nem rendelhető hozzájuk részecske rapiditás (mint a lyukak pozíciójához). Az energia és impulzus kifejezése mindig

$$\begin{aligned}E - E_{\text{bulk}} &= M \sum_{i=1}^{N_H} \cosh h_i + O(e^{-l}) \\ P &= M \sum_{i=1}^{N_H} \sinh h_i + O(e^{-l})\end{aligned}$$

azaz energiát és impulzust csak a lyukak hordoznak, az általuk elfoglalt pozíciók adják meg az adott állapotban található szolitonok/antiszolonok rapiditásait. A komplex gyökök szerepe arra korlátozódik, hogy a sok-szolon állapotok különböző belső kvantumszámokhoz tartozó (polarizációs) állapotait megkülönböztessék egymástól.

6.2.3. Infravörös határeset a vonzó tartományban

A vonzó tartományban ($\lambda > 1$ azaz $0 < \gamma < \pi/2$)

$$\sinh_{II}(\theta) = \sinh \theta - \sinh \left(\theta - \frac{i\pi}{\lambda} \right)$$

nem tűnik el a második determináció sávjában, így minden gyök, akár közeli, akár távoli, a Bethe kvantumszámok valósága miatt exponenciálisan gyorsan közelít egy aszimptotikus helyzethez, ha $l \rightarrow \infty$. Az ugyanazon valós résszel rendelkező gyökök esetén a kvantálási reláció imaginárius részét megvizsgálva, a lehetséges konfigurációk λ adott értékénél véges sok osztályba sorolhatók (ezek megegyeznek a Destri és de Vega által közvetlenül az XXZ Bethe Ansatzból származtatott osztályozással [DdV97]):

1. *I típusú konfigurációk*: ezek mindig tartalmaznak egy vagy két közeli párt, és a szoliton állapotok polarizációs szabadsági fokait írják le.
 - a) *Páratlan degenerált konfigurációk*: tartalmaznak egy önkonjugált gyököt a

$$\theta_0 = \theta + i \frac{\pi(\lambda + 1)}{2\lambda}$$

pozícióban és komplex párokat a

$$\theta_k = \theta \pm i \frac{\pi(\lambda - 2k - 1)}{2\lambda}, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{\lambda}{2} \right]$$

pozíciókban (θ tetszőleges valós szám lehet). Ezek felelnek meg a taszító tartományban az egy önkonjugált gyököt tartalmazó konfigurációnak.

- b) *Páros degenerált konfigurációk*: ezek csak komplex párokat tartalmaznak a

$$\theta_k = \theta \pm i \frac{\pi(\lambda - 2k)}{2\lambda}, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{\lambda}{2} \right]$$

pozíciókban, ezek felelnek meg a taszító tartományban az egy közeli párt tartalmazó konfigurációnak.

- c) *Nemdegenerált konfigurációk*: ezek mindig két közeli párt tartalmaznak, leírásukat ld. [DdV97]. Ezek a taszító tartomány távoli párjainak vonzó tartománybeli megfelelői, leírásuktól most eltekintek, mivel ezeket nem fogjuk használni.
2. *II típusú konfigurációk*: ezek nem kötődnek lyuk gerjesztésekhez, teljesen szabadon hozzáadhatók tetszőleges számban tetszőleges állapothoz. Kizárólag távoli gyököket tartalmaznak⁵, és a lélegzők leírását adják.
 - a) *Páratlan II típusú konfigurációk*: Mindig tartalmaznak egy önkonjugált gyököt

$$\theta_0 = \theta + i\pi(\lambda + 1)/2\lambda$$

és távoli párokat

$$\theta_k = \theta \pm i \frac{\pi(\lambda - (2k + 1))}{2\lambda}, \quad k = 0, \dots, s$$

ahol

$$0 \leq s \leq \left[\frac{\lambda}{2} \right] - 1$$

lehet. Ezek a páratlan (B_{2s+1}) lélegzőket írják le, a θ valós rész éppen a lélegző rapiditása.

⁵ A (6.20) számláló egyenlet alapján látható, hogy a vonzó tartományban a távoli gyökök nem járulnak hozzá a topológiai töltéshez.

b) *Páros II típusú konfigurációk*: csak távoli párokat tartalmaznak

$$\theta_k = \theta \pm i \frac{\pi(\lambda - 2k)}{2\lambda} \quad , \quad k = 0, \dots, s$$

ahol s ugyanabban a tartományban fut. Ezek a B_{2s+2} lélegzőt írják le.

Látható, hogy λ csökkentésével a II típusú konfigurációk szépen sorban I típusúvá alakulnak át (az előző I típusú konfiguráció pedig megszűnik). Ennek magyarázata egyszerű: amikor λ éppen átlép egy egész értéket, a megfelelő lélegző eltűnik a spektrumból, azaz szétesik szolitonra és antiszolitonra.

Az infravörös határesetben a (6.16, 6.17) egyenletekben elhanyagolhatjuk az integrálgatot, és kiszámolhatjuk egy II típusú konfiguráció járulékát az energia-impulzushoz, amire

$$E = 2M \sin \frac{\pi k}{2\lambda} \cosh \theta \quad , \quad p = 2M \sin \frac{\pi k}{2\lambda} \sinh \theta$$

adódik, ahol k a konfigurációban résztvevő komplex gyökök teljes száma és θ a közös valós részük, ami pontosan megfelel egy θ rapiditású B_k lélegző járulékának. Az I típusú konfigurációk járuléka az infravörösben zérusnak adódik, ami konzisztens azzal, hogy ezeket a szolitonok polarizációjaként interpretáltuk.

6.2.3.1. Lélegző-szoliton szórás

A Bethe kvantálási feltételek egy θ_1 rapiditású szoliton (azaz lyukat) és egy θ_2 rapiditású B_n lélegzőt (vagyis egy n távoli gyökből álló II típusú konfigurációt) tartalmazó állapotra a következők: egyrészt a lyukra

$$Z(\theta_1) = M \sinh \theta_1 - \sum_{k=1}^n \chi_{II}(\theta_1 - \theta_2 - i\rho_k) = 2\pi I_1$$

ahol ρ_k a B_s konfiguráció gyökeinek (infravörösben rögzített) imaginárius részeit jelöli (felhasználtuk, hogy $\chi(0) = 0$). Másrészt

$$\chi_{II}(\theta) = \begin{cases} \text{gd}(\theta + i\pi/2) + \text{gd}(\theta - i\pi/2 + i\pi(1 + 1/\lambda)) & , \Im m\theta < -\pi/\lambda \\ \text{gd}(\theta - i\pi/2) + \text{gd}(\theta + i\pi/2 - i\pi(1 + 1/\lambda)) & , \Im m\theta > \pi/\lambda \end{cases}$$

ahol

$$\text{gd}(\theta) = i \log \frac{\sinh(i\pi/4 + \theta/2)}{\sinh(i\pi/4 - \theta/2)}$$

és a logaritmus ágát úgy választjuk meg, hogy $\text{gd}(\theta)$ folytonos és a valós tengelyen páratlan legyen. Elemi algebrai átalakítások után

$$Z(\theta_1) = M \sinh \theta_1 - i \log S^n(\theta_1 - \theta_2) = 2\pi I_1$$

ahol $S^n(\theta_1 - \theta_2)$ a (C.15) lélegző-szoliton szórási amplitúdó.

A lélegzőt alkotó gyökök kvantálási feltételeiből is kiindulhatunk⁶:

$$Z_{II}(\theta_2 + i\rho_k) = M \sinh_{II}(\theta_2 + i\rho_k) + \chi_{II}(\theta_2 - \theta_1 + i\rho_k) + \dots = 2\pi I_2^{(k)} \quad , \quad k = 1, \dots, n \quad (6.26)$$

a ... olyan tagokat jelöl, amik a következő lépésben 2π egész számú többszöröseirekig kiesnek. Ezeket az egyenleteket felösszegezve:

$$2M \sin \frac{n\pi}{2\lambda} \sinh(\theta_2) - i \log S^n(\theta_2 - \theta_1) = 2\pi I_2$$

⁶ Mivel itt távoli gyökökről van szó, a kvantálási feltételt a Z függvény (6.19) alatti második determinációjával kell felírni.

ahol I_2 lényegében $-\sum_k I_2^{(k)}$ plusz az előbb említett járulék, ami az expliciten ki nem írt tagokból adódik.

Hasonló módon lehet reprodukálni a lélegző-lélegző S -mátrixokat is, egy B_m és egy B_n konfigurációt véve kiindulásul, amelyeknél a gyökök imaginárius részei ρ_k illetve ρ'_l . Ekkor a kvantálási feltételekre a következő adódik:

$$\begin{aligned} 2M \sin \frac{n\pi}{2\lambda} \sinh(\theta_1) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (\chi_{II})_{II}(\theta_1 - \theta_2 + i\rho_k - i\rho'_l) &= 2\pi I_1 \\ 2M \sin \frac{m\pi}{2\lambda} \sinh(\theta_2) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (\chi_{II})_{II}(\theta_2 - \theta_1 + i\rho'_l - i\rho_k) &= 2\pi I_2 \end{aligned}$$

ahol

$$(\chi_{II})_{II}(\theta) = \begin{cases} \chi_{II}(\theta) - \chi_{II}(\theta - i\pi/\lambda) & , \Im m\theta < -\pi/\lambda \\ \chi_{II}(\theta) - \chi_{II}(\theta + i\pi/\lambda) & , \Im m\theta > \pi/\lambda \end{cases}$$

Elemi átalakításokkal

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (\chi_{II})_{II}(\theta_1 - \theta_2 + i\rho_k - i\rho'_l) = -i \log S^{m,n}(\theta_1 - \theta_2)$$

ahol $S^{m,n}$ a (C.14) lélegző-lélegző S mátrix.

A szoliton-antiszoliton állapotokat két lyuk és egy I típusú degenerált konfiguráció írja le. Minden ilyen konfiguráció egy közeli párt tartalmaz, amivel az állapot $Q = 2S$ topológiai töltése (6.20) alapján zérus. A komplex gyökök konfigurációjára két választás tehető aszerint: páratlan vagy páros, és a fent vázoltakhoz hasonló elemi számítással belátható, hogy a kvantálási feltételek pontosan reprodukálják a (6.23) alatti S_{\pm} sajátértékeket.

A fenti eredményeket Feveratival és Ravaninivel publikáltuk [FRT00].

6.3. Kis térfogat (ultraibolya) határeset

Ebben a fejezetben a Feveratival és Ravaninivel írott [FRT99] cikk alapján a DdV egyenlet ultraibolya viselkedésének analizisét mutatom be. A módszer Destri és de Vega [DdV97] munkáján alapul, de több ponton különbözik az eredetitől. Egyfelől a jelen esetben az integrálegyenlet korrekt alakjából indulunk ki, másfelől pedig nem szorítjuk meg a δ kvantálási paramétert egy

$$\delta = S \bmod 2$$

feltétellel, amint azt Destri és de Vega teszi⁷, hanem értékét (ami 0 vagy 1 lehet) szabadon hagyjuk. Ezért itt felelevenítem a levezetés fő pontjait.

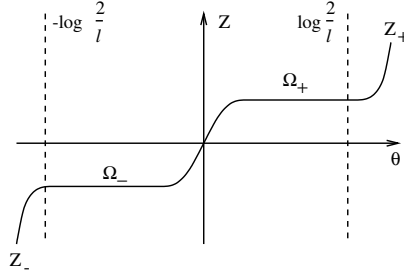
Kis térfogatban az energiaszinteket az ultraibolya konform térelmélet adja meg, az energia és az impulzus (2.7,2.8) szerint:

$$\begin{aligned} E(L) &= \frac{2\pi}{L} \left(\Delta_+ + \Delta_- - \frac{c}{12} \right) \\ P(L) &= \frac{2\pi}{L} (\Delta_+ - \Delta_-) \end{aligned} \tag{6.27}$$

Ezek szerint azokat a járulékokat kell összegyűjteni, amelyek $L \rightarrow 0$ -ra $1/L$ -ként viselkednek. Pl. egy lyuk által adott $M \cosh h$ energiajárulék akkor ad ilyen tagot, ha

$$h = \text{véges} \pm \log \frac{2}{l} \tag{6.28}$$

⁷ Ennek oka, hogy ők a rácspontok számának felét megadó N paraméterre csak páros értéket engednek meg, így $\delta = M \bmod 2$ és $S = N - M$ pontosan erre a megszorításra vezet.

6.3. ábra. A Z függvény viselkedése kis l -re

Hasonló feltételek érvényesek a komplex gyökökre is.

Ennek megfelelően az (6.15) integrálegyenlet $g(\theta|\theta_i)$ forrását meghatározó lyukak/gyökök három osztályba sorolhatók az $l \rightarrow 0$ viselkedésük alapján:

1. $\theta_i \sim \log \frac{2}{l}$: jobbra mozgók
2. $\theta_i \sim -\log \frac{2}{l}$: balra mozgók
3. $\theta_i \sim 0$: centrálisak

Mind a három osztályban bevezetjük a $\theta_j^{\pm,0}$ véges részeket a divergens járulék levonásával:

$$\{\theta_j\} \rightarrow \left\{ \theta_j^{\pm} \pm \log \frac{2}{l}, \theta_j^0 \right\} \quad (6.29)$$

A jobbra mozgó/balra mozgó/centrális lyukak számát jelölje $N_H^{\pm,0}$ és hasonlóképpen bevezetjük az $N_S^{\pm,0}$, $M_C^{\pm,0}$ és $M_W^{\pm,0}$ számokat.

Mivel $l \rightarrow 0$ -ra a három régió egymástól végtelen távolra kerül, az integrálegyenletet ennek megfelelően három részre bonthatjuk (itt célszerű az $\eta \rightarrow +0$ határátmenet elvégzése után az integrálegyenletet a valós tengelyen felírni). Ha feltüntetjük $Z(\theta)$ eddig csak implicit térfogatfüggését a $Z(\theta, l)$ alakban, akkor három függvényt vezethetünk be: a

$$Z_{\pm}(\theta) = \lim_{l \rightarrow 0} Z\left(\theta \pm \log \frac{2}{l}, l\right) \quad (6.30)$$

ún. „kink” függvényeket és a

$$Z_0(\theta) = \lim_{l \rightarrow 0} Z(\theta, l)$$

centrális függvényt. A három függvény által leírt aszimptotikus tartományokat plató régiók kötik össze, amelyekben a Z függvény konstans értéket vesz fel (6.3 ábra). Ezek a plató értékek éppen

$$\Omega_{\pm} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} Z_0(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \mp\infty} Z_{\pm}(\theta)$$

Legyen továbbá

$$S^{\pm,0} = \frac{1}{2}[N_H^{\pm,0} - 2N_S^{\pm,0} - M_C^{\pm,0} - 2M_W^{\pm,0}\theta(\pi - 2\gamma)]$$

a három tartomány „parciális” spinje (6.20) analógiájára, amivel

$$S = S^+ + S^- + S^0.$$

Vezessük be továbbá a

$$\chi_{\infty} = \chi(+\infty) = \pi \frac{\pi/2 - \gamma}{\pi - \gamma}$$

jelölést. Ezekkel a definíciókkal (6.15) a következő egyenleteket adja:

$$\begin{aligned} Z_{\pm}(\theta) &= \pm e^{\pm\theta} + g_{\pm}(\theta|\theta_i^{\pm}) + \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x) Q_{\pm}(x) \\ Z_0(\theta) &= g_0(\theta|\theta_i^0) + \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x) Q_0(x) \end{aligned} \quad (6.31)$$

ahol

$$\begin{aligned} g_{\pm}(\theta|\theta_i^{\pm}) &= \pm 2\chi_{\infty}(S - S^{\pm}) + 2\pi l_W^{\pm} + \sum_{j=1}^{N_H^{\pm}} \chi(\theta - h_j^{\pm}) - 2 \sum_{j=1}^{N_S^{\pm}} \chi(\theta - y_j^{\pm}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{M_C^{\pm}} \chi(\theta - c_j^{\pm}) - \sum_{j=1}^{M_w^{\pm}} \chi_{II}(\theta - w_j^{\pm}) \\ g_0(\theta|\theta_i^0) &= 2\chi_{\infty}(S^- - S^+) + 2\pi l_W^0 + \sum_{j=1}^{N_H^0} \chi(\theta - h_j^0) - 2 \sum_{j=1}^{N_S^0} \chi(\theta - y_j^0) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{M_C^0} \chi(\theta - c_j^0) - \sum_{j=1}^{M_w^0} \chi_{II}(\theta - w_j^0) \end{aligned} \quad (6.32)$$

valamint

$$Q_{\sigma}(x) = \frac{1}{i} \log \frac{1 + (-1)^{\delta} e^{iZ_{\sigma}(x+i0)}}{1 + (-1)^{\delta} e^{-iZ_{\sigma}(x-i0)}} \quad , \quad -\pi < Q_{\sigma}(x) \leq \pi$$

ahol $\sigma = \pm, 0$, l_W^{\pm} pedig a távoli gyökök konfigurációjától függő (fél)egész számok. A források pozícióit a következő kvantálási feltételek határozzák meg:

$$Z_{\pm}(\theta_j^{\pm}) = 2\pi I_j^{\pm} \quad , \quad Z_0(\theta_j^0) = 2\pi I_j^0$$

(6.31) a következő aszimptotikus viselkedést adja:

$$Z_{+}(+\infty) = +\infty = -Z_{-}(-\infty) \quad (6.33)$$

$$Q_{\pm}(\pm\infty) = 0 \quad (6.34)$$

Másrészt, bevezetve az $\omega_{\pm} = Q_{\pm}(\mp\infty)$ jelölést, a (6.31) egyenletekből következnek az ún. plató egyenletek

$$\Omega_{\pm} = g_{\pm}(\theta = \mp\infty) + \frac{\chi_{\infty}}{\pi} \omega_{\pm} \quad (6.35)$$

viszont Q definíciójából

$$\Omega_{\pm} = \omega_{\pm} + \pi\delta + 2\pi k \quad \text{ahol} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6.36)$$

(6.32)-ből

$$g_{\pm}(\theta = \mp\infty) = \pm 2(S - 2S^{\pm}) \chi_{\infty} + 2\pi k_W^{\pm}$$

ahol k_W^{\pm} egész számok, amelyek a széles gyökök konfigurációjától függnek. Ebből

$$\omega_{\pm} = \pm 2(\pi - 2\gamma)(S - 2S^{\pm}) - 2(\pi - \gamma)(\delta + 2k_{\pm}) \quad (6.37)$$

a k_{\pm} egész számokat a $-\pi < \omega_{\pm} \leq \pi$ feltétel rögzíti, mégpedig a taszító tartományban egyértelmű módon, mivel $4(\pi - \gamma) \geq 2\pi$, ami viszont azzal jár, hogy előfordulhat, hogy a plató egyenletnek

nincs is megoldása. Ezt a speciális gyökök/lyukak megjelenése orvosolja, erre itt most nem térünk ki, részletesen analizált példák találhatók [FRT99]-ban. A vonzó tartományban ellenben k megválasztása nem feltétlenül egyértelmű: ez azzal kapcsolatos, hogy a távoli gyökök a lyukaktól független gerjesztéseket (lélegzőket) írnak le [DdV97].

Az energia-impulzus vektor fénykúp komponensei a következő alakba írhatók

$$\begin{aligned} E \pm P = & M \left(\sum_{k=1}^{N_H} \exp(\pm h_k) - 2 \sum_{k=1}^{N_S} \exp(\pm y_k) - \sum_{k=1}^{M_C} \exp(\pm c_k) \right) \\ & + M \sum_{k=1}^{M_W} \exp_{II}(\pm w_k) \mp M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} e^{\pm \rho} Q(\rho) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Ha most a fenti analízist erre a kifejezésre alkalmazzuk, akkor a forrástagok $1/L$ járulékai kizárólag a fénykúp komponensnek megfelelő irányban mozgó forrásokból jönnek, és értékük

$$\frac{1}{L} e^{\pm \theta_k^\pm} \quad (6.39)$$

Az integrál járulékok számításához azt kell látnunk, hogy Q a következő alakba írható:

$$Q(x, l) \sim Q_- \left(x + \log \frac{2}{l} \right) + Q_+ \left(x - \log \frac{2}{l} \right) - Q_0(-x) + q(x, l), \quad (6.40)$$

ahol $q(x, l)$ a $l \rightarrow 0$ határesetben eltűnik. Ennek megfelelően az $1/L$ járulékok a két integrálból:

$$\begin{aligned} M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \frac{1}{2} e^x Q(x) & \sim \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^x Q_+(x) \\ M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \frac{1}{2} e^{-x} Q(x) & \sim \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-x} Q_-(x) \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva a konform súlyokra a

$$\begin{aligned} \Delta_\pm - \frac{c}{24} = & \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{N_H^\pm} \exp(h_j^\pm) - \sum_{j=1}^{M_C^\pm} \exp(c_j^\pm) + \sum_{j=1}^{M_W^\pm} \exp_{II}(w_j^\pm) - 2 \sum_{j=1}^{N_S^\pm} \exp(y_j^\pm) \right) \\ & \mp \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm x} Q_\pm(x) \end{aligned}$$

kifejezés adódik, ami zárt alakban kiértékelhető a következő lemma segítségével:

Lemma (Destri és de Vesga, [DdV97]). Legyen az f függvény a következő integrálegyenlet megoldása:

$$-i \log f(x) = \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dy G(x-y) F(y)$$

ahol

$$F(x) = 2\Im m \log(1 + f(x + i0))$$

φ és G valós függvények, G páros és integrálható a teljes számegyenesre. Tegyük fel továbbá hogy amennyiben $f(x + i\epsilon)$ valós, akkor nagyobb mint -1 (ϵ egy infinitezimális pozitív valós szám). Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi'(x) F(x) = -2\Re e \int_{\Gamma} \frac{du}{u} \log(1+u) + \frac{1}{2} (F_+^2 - F_-^2) \int_{-\infty}^{\infty} dx G(x)$$

ahol $F_{\pm} = F(\pm\infty)$ és Γ tetszőleges kontúr a komplex u síkon ami mentén $u > -1$ és az $f_- = f(-\infty)$ pontból az $f_+ = f(+\infty)$ pontba fut.

A bizonyítást ld. Destri és de Vega idézett művében.

A lemmát egyszer a $\varphi_+(\theta) = e^{\theta} + g_+(\theta)$, egyszer pedig a $\varphi_-(\theta) = -e^{-\theta} + g_-(\theta)$ függvényre alkalmazva, ahol $f_+(\theta) = e^{iZ_+(\theta)}$ illetve $f_-(\theta) = e^{iZ_-(\theta)}$, G pedig mindkét esetben a (6.8) DdV kernel, és felhasználva a jobbra és balra futó források kvantálási feltételeit, a következő adódik:

$$\Delta_{\pm} = \frac{c}{24} \pm (I_H^{\pm} - I_C^{\pm} - I_W^{\pm} - 2I_S^{\pm}) + \frac{\Sigma_{\pm}}{2\pi} - \frac{\omega_{\pm}^2}{2\pi} \chi_{\infty} - \frac{1}{2\pi} \Re \int_{\Gamma_{\pm}} \frac{du}{u} \log(1+u)$$

ahol

$$\Sigma_{\pm} = -4S^{\pm}(S - S^{\pm})\chi_{\infty} + 2\pi q_W^{\pm} \quad (6.41)$$

valamint

$$I_H^{\pm} = \sum_{j=1}^{N_H^{\pm}} I_{h_j}^{\pm}, \quad I_C^{\pm} = \sum_{j=1}^{M_C^{\pm}} I_{c_j}^{\pm}, \quad I_W^{\pm} = \sum_{j=1}^{M_W^{\pm}} I_{w_j}^{\pm} \text{ s } I_S^{\pm} = \sum_{j=1}^{N_S^{\pm}} I_{y_j}^{\pm}$$

a jobbra/balra mozgó források Bethe kvantumszámainak típusonkénti összege, q_W^{\pm} pedig egy egész/félegész szám, ami távoli gyökök részletes konfigurációjától függ, amit egyszerűbb esetenként kiszámítani, amikor szükséges (zárt alakban is megadható, de teljesen áttekinthetetlen). A Γ_{\pm} kontúr az $e^{i\omega_{\pm}}$ pontból az origóba fut, egy kényelmes választás az egységkör mentén elvinni $u = 1$ -ig és utána a valós tengely mentén $u = 0$ -ba. Ezzel az integrál expliciten kiszámítható:

$$-2\Re \int_{\Gamma_{\pm}} \frac{du}{u} \log(1+u) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\omega_{\pm}^2}{2}$$

az első tag a $0 \leq u \leq 1$ intervallumon a dilogaritmusz integrál ismert értékéből adódik:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \log(1+x) = \frac{\pi^2}{12}$$

a körív menti integrál pedig egy lineáris függvény elemi integráljaként számítható ki. Ezzel a végeredmény

$$\Delta_{\pm} = \frac{c-1}{24} \pm (I_H^{\pm} - 2I_S^{\pm} - I_C^{\pm} - I_W^{\pm}) + \frac{\Sigma_{\pm}}{2\pi} + \frac{\omega_{\pm}^2}{16\pi^2(1-\gamma/\pi)}. \quad (6.42)$$

A fenti eredményt érdemes egy kicsit közelebbről megvizsgálni. Tegyük fel, hogy a sine-Gordon elméletet egy r sugárral kompaktifikált bozon (ld. B.5.1 függelék) perturbációjaként realizáltuk, ahol a perturbáló operátor $V_{(1,0)} + V_{(-1,0)}$, azaz a 4.2.2 alatti terminológiában egyszerűen hajtogatott modelltől van szó. Ekkor $c = 1$, valamint

$$\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{r} \quad \text{és} \quad \lambda = \frac{8\pi}{\beta^2} - 1 \Rightarrow 1 - \frac{\gamma}{\pi} = \frac{1}{2r^2}$$

és egyszerű algebrai átalakításokkal

$$\Delta_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{n_{\pm}^2}{r^2} + \frac{1}{8} (2S)^2 r^2 \pm \frac{n_{\pm} 2S}{2} + \tilde{N}_{\pm} \quad (6.43)$$

ahol

$$n_{\pm} = (\frac{\delta}{2} + k_{\pm}) \mp (S - 2S^{\pm}) \quad (6.44)$$

és

$$\tilde{N}_{\pm} = \pm(I_H^{\pm} - 2I_S^{\pm} - I_C^{\pm} - I_W^{\pm}) + q_W^{\pm} - 2(S^{\pm})^2 \mp 2S^{\pm}(\frac{\delta}{2} + k_{\pm})$$

Tegyük fel, hogy a bozonikus elméletet (S_B) vizsgáljuk, ekkor ennek spektruma

$$\Delta_{\pm} = \frac{n^2}{2r^2} + \frac{m^2 r^2}{8} \pm \frac{nm}{2} + N_{\pm}$$

alakú kell legyen, ahol n a primér vertex operátor impulzus kvantumszáma, m a csavarodási száma (mindkettő egész), N_{\pm} az oszcillátor módusok által adott leszármaztatási szint (nemnegatív egész szám). Ebből látjuk, hogy $2S$ az m csavarodási számmal azonosítható, ami teljesen összhangban van az infravörös határesettel, ahol a topológiai töltéssel találtuk azonosnak. Mivel S egész, ezért a DdV egyenlet csak a páros csavarodási számú szektort állítja elő, ahol a bozonikus és a fermionikus elmélet spektruma egybeesik, tehát mostantól nem kell a kettő között különbséget tennünk. Az r^{-2} tagok egyezéséből azt kapjuk, hogy fent kell állnia a

$$n_+^2 = n_-^2 \quad (6.45)$$

feltételnek és ekkor megtehető az $n = \pm n_+$ azonosítás. Egy másik feltételt ad, hogy n előjelét úgy kell tudnunk megválasztani, hogy a primér súlyok leválasztása után fennmaradó rész nemnegatív egész szám legyen, és így azonosítható legyen az N_{\pm} leszármaztatási számokkal. Máig sem tudjuk, hogy ez a két feltétel minden elképzelhető Bethe gyök konfigurációra teljesül-e, azonban nagyszámú konkrét eset vizsgálata után sem találtunk erre ellenpéldát.

Másrészt (6.44)-ből kapjuk, hogy

$$2n_{\pm} = \delta \bmod 2 \quad (6.46)$$

ahol kihasználtuk, hogy $2S$ és $4S^{\pm}$ mindig páros. Ennek segítségével meghatározhatjuk azt a kvantálási előírást, ami a konform térelmélettel konzisztens ultraibolya spektrumot ad: a szabály

$$\delta = 0$$

Ez nem egyezik meg Destri és de Vega

$$\delta \equiv S \bmod 2$$

előírásával, amit [DdV97]-ben arra alapoznak, hogy mivel a spinlánc hossza ($2N$) a kontinuum határesetben végtelenhez tart, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy N páros. Láthatjuk, hogy ez nem igaz, mert δ értéke függ N paritásától, és δ a kontinuumban is az integrálegyenlet paramétere marad. A helyes eljárás δ -t szabadon hagyni, ahogy azt a fentiekben tettük, és a konform térelméleti spektrummal való illesztéssel megválasztani.

Egyszerűen látható, hogy amennyiben semmilyen forrás nincs jelen (ami a rácson az alapállapotnak felel meg), akkor ($\delta = 0$ mellett)

$$\Delta_{\pm} = 0$$

adódik, ami konform térelméleti nyelven is a vákuum állapotnak felel meg. Ezzel tulajdonképpen azt igazoltam, hogy helyes volt az integrálegyenlet által leírt spektrum ultraibolya fixpontjára vonatkozólag a $c = 1$ azonosítás.

Máig sem ismert, hogy vajon az integrálegyenlet által leírt összes lehetséges energiaszint kimeríti-e a páros topológiai töltésű állapotok konform térelmélet által jósol spektrumát. Ez három okból is nagyon nehéz probléma: egyfelől az ultraibolya súlyok függése a Bethe gyök konfigurációtól nagyon bonyolult, másfelől a komplex gyökök megengedett kvantumszámait csak az infravörös határeset vizsgálatával lehet feltérképezni, harmadrészt a konfiguráció változhat is a térfogattal. Az utóbbival kapcsolatban megjegyzem, hogy míg nagy térfogaton nincsenek jelen

speciális források (azaz a valós tengelyen Z mindig szigorúan monoton növekszik), a térfogat csökkenésével ez megváltozhat. Mint már említettem, számos olyan, infravörösben teljesen jól működő konfiguráció van, amikre a (6.35) ultraibolya platóegyenleteknek nincs megoldása, ez azt jelzi, hogy a térfogat csökkentésével meg kell jelennie valamilyen speciális forrásoknak, amelyekkel együtt már lesz ilyen megoldás. Az infravörös és az ultraibolya gyök konfiguráció kapcsolata tehát nagyon bonyolult, így még ha a pl. a komplex gyökök lehetséges kvantumszámainak osztályozását véghez is visszük az infravörösben, ez még messze nem elég az ultraibolya konform súlyok teljes meghatározásához. Ráadásul ugyanahhoz az állapothoz a csatolási állandótól függően más és más gyök konfiguráció tartozhat (például a 6.2.3 alatt tárgyalt $(s\bar{s})_{\pm}$ állapotok a vonzó tartományban).

A speciális források kezelésére (az ultraibolya határesetben) kifejlesztettem egy eljárást, amit Ravaninivel és Feveratival közös cikkekben [FRT99, FRT00] több példán is illusztráltunk. A lényege ennek az, hogy bármilyen konfigurációt is veszünk fel az infravörösben, mindig lehet olyan tartományt találni γ -ban, amikor a (6.35) ultraibolya platóegyenleteknek van megoldása speciális források bevezetése nélkül is. Ebből meghatározhatjuk az Ω_{\pm} plató értékeket mint γ függvényét. Mivel az integrálegyenlet és a Z függvény analitikusan függ γ -tól, ezért Ω_{\pm} elfolytatható γ -ban a minket érdeklő tartományba. Ezzel természetesen ω_{\pm} változni fog (6.36) szerint (a logaritmus ugrásai miatt), de ez mindig kézben tartható és segítségével γ függvényében nyomon követhető a speciális források megjelenése. Ugyanezzel a technikával lehet rögzíteni a plató megoldás esetleges határozatlanságát a vonzó tartományban.

A fentiek az eredeti cikkekben [FRT98b, FRT99, FRT98a, FRT00] számos konkrét állapot részletes analizisével illusztráltuk, amire itt most nem térek ki, az érdeklődő olvasó az eredeti irodalomban megtalálhatja, valamint (leginkább a rács Bethe Ansatzzal kapcsolatosan) további érdekes részleteket találhat Destri és de Vega [DdV97] cikkében is. Itt most csupán egy, a lélegző állapotokkal kapcsolatos megjegyzésre szorítkozom. A sztatikus B_1 állapot ultraibolya súlyára

$$\Delta^{\pm} = \frac{1}{2r^2}, \quad (6.47)$$

adódik, tehát ennek az állapotnak az ultraibolya határesetben a $V_{\pm 1,0}$ vertex operátorok egy lineáris kombinációjával kelthető, mégpedig az állapot negatív paritása miatt a

$$V_1^{-} = V_{+1,0} - V_{-1,0}$$

kombinációval. A sztatikus B_2 -re ugyanígy

$$\Delta^{\pm} = \frac{1}{2r^2}$$

adódik, tehát ezt az állapotot

$$V_1^{+} = V_{+1,0} + V_{-1,0}$$

kelti. Pallua és Prester ezzel konzisztens eredményeket kapott a sine-Gordon modellt egy transzverzális mágneses térbe helyezett XXZ láncsal regulálva, és a spektrumot közvetlen numerikus diagonalizálással előállítva [PP99] (ami után a rácstérelméletben szokásoshoz hasonló numerikus extrapolációt alkalmaztak a kontinuum határátmenetre).

A fentiek azzal is konzisztens, hogy a taszító tartományban V_1^{\pm} a legalacsonyabban fekvő (zéró összipulzusú) $(s\bar{s})_{\pm}$ ultraibolya megfelelőinek bizonyulnak (ebben a két lyuk kvantumszámai $I_1 = -I_2 = 1/2$). Ha λ -t csökkentjük, akkor $\lambda = 1$ -en áthaladva azt várjuk, hogy a legalacsonyabban fekvő állapot, ami ebben az esetben az $(s\bar{s})_{-}$, adja a sztatikus B_1 állapotot, $\lambda = 1/2$ -nél pedig azt, hogy a következő állapot (ebben az esetben a legalacsonyabban fekvő $(s\bar{s})_{+}$ állapot) megy át a sztatikus B_2 állapotba. A csatolási állandó ilyen hangolása a 4.2.2 alatti TCsa módszerrel elvégezhető, és pontosan ez látható a spektrumon. Ez annyiban is érdekes, mert cáfolja Klassen és Melzer egy korábbi sejtését [KM93] amely szerint a B_n lélegzőnek a $V_{\pm n,0}$ vertexoperátorok (a lélegző paritásának megfelelő) lineáris kombinációja felel meg. A DdV egyenletből kiszámítható,

hogy a további lélegzők váltakozva a V_1^\pm állapotok egyre magasabb leszármaztatott állapotainak felelnek meg, ami összhangban van azzal, hogy a taszító tartományban az egyre nagyobb impulzusú $(s\bar{s})_\pm$ állapotok ultraibolya határesetét pontosan ezek írják le meg (ezekben a lyukak kvantumszámai $I_1 = -I_2 = (2k+1)/2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, a megfelelő konform térelméleti operátor jobb, illetve bal leszármaztatási kvantumszáma pedig egyenlő k -val).

6.4. Páratlan topológiai töltésű állapotok

6.4.1. A bozonikus (sine-Gordon) modell esete

A számláló egyenletből világosan látható, hogy páratlan topológiai töltésű (azaz félegész S spinű) állapotra N_H páratlan kell legyen. A fénykúp rácson azonban nem lehet ilyen állapotokat előállítani, amint azt a (6.2) Bethe Ansatz egyenletek részletes analízise mutatja, és ez a tény régóta jól ismert az XXZ Bethe Ansatz kiterjedt irodalmában.

Azonban láthatóan semmi akadályja annak, hogy a (6.15) kontinuum DdV egyenletben N_H helyébe páratlan számot írjunk, azaz olyan forrás konfigurációkat vegyünk fel, amelyekben páratlan számú lyuk található. Feveratival és Ravaninivel közösen fogalmaztuk meg azt a sejtést, hogy az így előálló energiaszintek éppen megfelelnek a bozonikus S_B algebra páratlan csavarodási számú vertex operátorai és azok leszármazottai által generált állapotoknak, illetve az infravörös képet véve alapul, a páratlan számú szolitont tartalmazó állapotoknak.

Egy ilyen állapotban $S \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, és ebből következően (6.43) alapján az ultraibolya határesetben az m csavarodási szám páratlan. Viszont a (B.27) alatt megadott S_B spektrumban n ekkor is egész, vagyis ekkor (6.44) alapján a $\delta = 1$ választást kell tennünk, ami egész Bethe kvantumszámoknak felel meg. Ebből megfogalmazhatjuk az alábbi szabályt: a teljes sine-Gordon spektrumot az (6.15) egyenlet akkor állítja elő, ha N_H -ra megengedünk mind páros, mind páratlan értékeket és a

$$\delta = 2S \bmod 2 \quad (6.48)$$

szabály szerint választjuk meg a kvantálás módját.

Egy fontos példája ilyen állapotnak, amikor egyetlen lyuk van az origóban lokalizálva ($h = 0$), aminek megfelelő Bethe kvantumszám $I = 0$. A $\delta = 1$ választás mellett az ultraibolya súlyokra

$$\Delta^\pm = \frac{1}{8r^2}$$

adódik, ami a $V_{(0,1)}$ (vagy $V_{(0,-1)}$) vertexoperátornak felel meg. Az irodalomban jól ismert, hogy ez az operátor a sztatikus egy-szolitón állapot keltő operátorának ultraibolya határesetével azonosítható [KM93]. A [FRT98a] cikkben más (három lyukat, vagy három lyukat és komplex gyököket) tartalmazó állapotokat is megvizsgáltunk, és minden esetben a várakozásoknak megfelelő eredményt kaptuk.

Nagyon egyszerűen megvizsgálható az egy-lyuk állapot infravörös viselkedése is⁸. Nagy tér-fogatban

$$Z(L) = ML \sinh \theta + \chi(\theta) + O(e^{-ML})$$

amit a (6.16) energia kifejezésbe helyettesítve a következőt adja:

$$E_{1h} = M - iM \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \left[\sinh(\rho + i\eta) \log \left(1 - e^{iZ(\rho+i\eta)} \right) - \sinh(\rho - i\eta) \log \left(1 - e^{iZ(\rho-i\eta)} \right) \right]$$

A taszító tartományra korlátozódva, $\chi(\theta)$ -nak nincs szingularitása a $|\Im m \theta| < \pi$ sávban, így η eltolható $\frac{\pi}{2}$ -be, amivel

$$E_{1h} = M - M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \cosh \rho \left[S_{++}^{++} \left(\rho + i\frac{\pi}{2} \right) + S_{++}^{++} \left(i\frac{\pi}{2} - \rho \right) \right] e^{-ML \cosh \rho}$$

⁸ Ezt a számolást eredetileg nem végeztük el, kizárólag a jelenlegi dolgozatban szerepel.

ahol kihasználtuk a (6.22) összefüggést és χ páratlan voltát, valamint a logaritmust sorba fejtettük ($\log(1+x) \approx x$), kihasználva, hogy $e^{-ML \cosh \rho} \ll 1$. A (C.4) keresztezési összefüggést felhasználva

$$E_{1h} = M - M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \cosh \rho \left[S_{++}^{++} \left(\rho + i\frac{\pi}{2} \right) + S_{+-}^{+-} \left(\rho + i\frac{\pi}{2} \right) \right] e^{-ML \cosh \rho} \quad (6.49)$$

Hasonlóképpen felírhatjuk a vákuum energiáját is, amire

$$Z(\theta) = ML \sinh \theta + O(e^{-ML})$$

és ebből

$$E_{\text{vac}} = -2M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \cosh \rho e^{-ML \cosh \rho} \quad (6.50)$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} E_{1h} - E_{\text{vac}} &= M - M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \cosh \rho \left(S_{++}^{++} \left(\rho + i\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) e^{-ML \cosh \rho} \\ &\quad - M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \cosh \rho \left(S_{+-}^{+-} \left(\rho + i\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) e^{-ML \cosh \rho} \end{aligned} \quad (6.51)$$

adja a szoliton tömeg vezető viselkedését nagy térfogatban. Ez pontosan megfelel a Lüscher által származtatott eredmény (2.2) alatti $1+1$ dimenziós verziójának. A taszító tartományban nincsenek kötött állapotnak megfelelő fúziók, ezért nincs μ -tag, a két korrekciós tag közül az első egy szoliton, a második egy antiszoliton hurok járulékát megadó F -taggal egyezik meg.

A fenti eredményt, miszerint a Destri-de Vega egyenlet nagy térfogatú határesetére visszaadja a Lüscher-féle tömegkorrekciót, numerikusan Balog és munkatársai is ellenőrizték [BKKW03, BKKW04]. Munkájuk azonban ezen jóval túlmegegy: rácskérdelméleti, valamint perturbatív két-hurok számításokkal igazolták az általunk a tömegrés egzakt véges térfogatbeli viselkedésére adott analitikus jóslat helyességét. Eredményeik egyben alátámasztják, hogy az XY modell kontinuum határesetére éppen a sine-Gordon modell $\beta^2 \rightarrow 8\pi$ határesetével esik egybe, valamint az ún. Kosterlitz-Thouless scenáriót, ami a korrelációs hossz viselkedését írja le a rács csatlóási állandó függvényében a kontinuum határesetet definiáló kritikus pont körül. Az utóbbi lényeges következménye, hogy a rácskérdelméleti eredmények és a DdV egyenlet jóslata közti egyezéshez elengedhetetlen a rácsállandótól való logaritmikus függés figyelembe vétele [Bal01, B⁺01], ami eltér a Symanzik klasszikus munkája [Sym83] alapján várható hatványszerű korrekcióktól. Az ilyen levágási effektusok tisztázása nagyon fontos lehet a precíziós rács-QCD számítások szempontjából (amint ezt Hasenfratz Péter és munkatársai is hangsúlyozzák a σ -modellekben általuk tapasztalt anomális levágásfüggés kapcsán [HN01, HHN⁺02]; ennek elméleti megértése még mindig várat magára). A fentebb vázolt problémakör szép példáját adja annak, amikor az integrálható modellek elméletéből tanultak lényeges információt szolgáltatnak az elméleti fizika más területén (adott esetben a rácskérdelméletben) felmerülő problémák vizsgálatához.

6.4.2. A fermionikus (tömeges Thirring) modell leírása

Az S_F esetben a páratlan csavarodási számú állapotokra az n kvantumszám félegész, az előzőek alapján ez akkor áll fenn, ha minden állapotra (a páratlan töltésűekre is) a

$$\delta = 0 \pmod{2} \quad (6.52)$$

előírást választjuk. Az egy lyuk állapot ultraibolya dimenziói (a lyuk kvantumszámát $I = 1/2$ -nek választva)

$$\Delta^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2r} \pm \frac{r}{2} \right)^2,$$

ami $V_{(1/2,1)}$ súlyaival egyezik meg. Az $I = -1/2$ választás $V_{(-1/2,1)}$ -hez vezet. A B.5.1 alatt leírtak szerint ezek éppen a $c = 1$ konform térelméletben definiálható Dirac fermion mező pozitív töltésű komponensei, ezért az egy-lyuk konfigurációkat a tömeges Thirring modell egy-fermion állapotaival azonosíthatjuk. A vezető végesméret korrekció ezúttal $1/L$ -ben hatványszerű viselkedést mutat:

$$E_{1h} - E_{\text{vac}} = \sqrt{M^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} + O(e^{-ML})$$

mivel a lyuk most mindenképpen mozog ($h \neq 0$) és pozícióját az infravörös határesetben az

$$ML \sinh h = \pm\pi$$

egyenlet írja le, az $I = \pm 1/2$ választásnak megfelelően.

6.5. Összehasonlítás a csonkolt konform állapotér közelítéssel

A DdV egyenlettel végzett munkánk [FRT98b, FRT99, FRT98a, FRT00] során folyamatosan összehasonlítottuk az integrálegyenlet jóslatait a csonkolt konform állapotér közelítésből kapott numerikus adatokkal (a TCSA módszer leírását ld. 4.2.2 alatt). Ennek több haszna volt:

1. Mivel a TCSA módszer a modell Lagrange-függvényes (egészen pontosan a perturbált konform térelméleti) leírásából indul ki, ezért az összevetés annak ellenőrzését is jelentette, hogy a fénykúp rács regularizáció kontinuum határeseteként előálló DdV egyenlet valóban a sine-Gordon modellt írja le.
2. Közvetlenül teszteltük az infravörös és az ultraibolya aszimptotikára vonatkozó analitikus eredményeket.
3. Az átmeneti tartományban

$$ML \sim O(1)$$

ahol a DdV egyenlet esetében csak numerikus (bár nagy pontossággal előállítható) eredményekre hagyatkozhattunk, lehetőség nyílt az egyenlet tesztelésére. Ebben a tartományban sem a Lüscher-féle infravörös leírás, sem a konform térelmélet nem nyújt megfelelő összehasonlítási alapot.

4. Az átmeneti tartomány elérhetősége azt is jelentette, hogy közvetlenül ellenőrizhettük az infravörös-ultraibolya hozzárendelést. Ezen azt értem, hogy egy adott megoldása a DdV egyenleteknek az infravörösben valamilyen részecsketartalommal és hozzájuk tartozó impulzus kvantumszámokkal, az ultraibolyában pedig valamilyen konform súlyokkal jellemezhető. Ez azt jelenti, hogy a DdV egyenlet egy megfeleltetést létesít az állapotér ultraibolya, konform térelméleti leírása, és az infravörös, sokrészecske állapotokkal történő leírás között. A TCSA módszerrel ennek a megfeleltetésnek a helyességét lehetett ellenőrizni.

A kiterjedt összevetés eredménye az, hogy a sine-Gordon/tömeges Thirring modell véges térfogatbeli spektrumára vonatkozó, az előzőekben tett összes állítást a TCSA módszerrel való összevetés fényesen alátámasztotta. Az eltérések minden esetben a TCSA módszerre jellemző csonkolási hibának megfelelő nagyságúak voltak.

Az összehasonlítás során figyelembe kell venni, hogy a perturbált konform térelméleti képben a vákuum (és valamennyi állapot) energiája tartalmazza a következő lineáris (ún. „bulk”) járulékot:

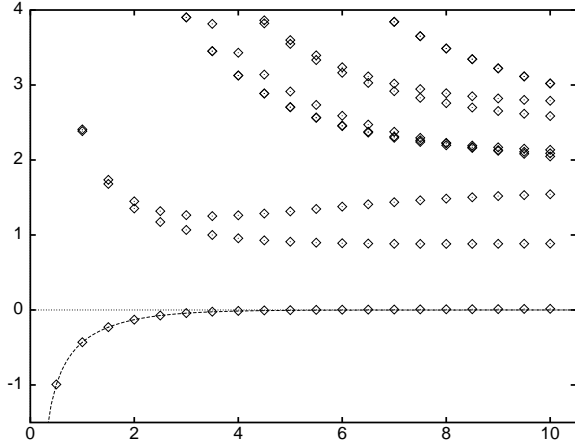
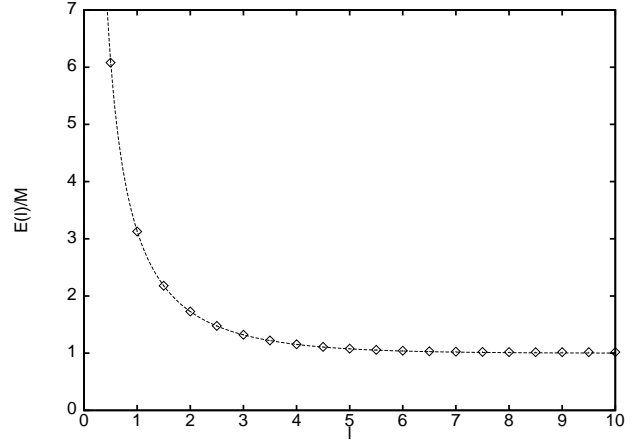
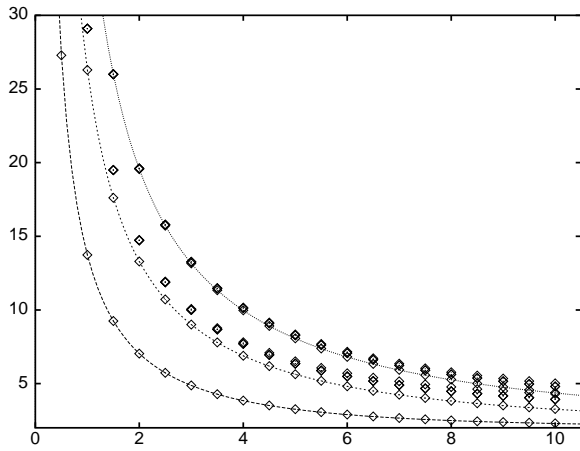
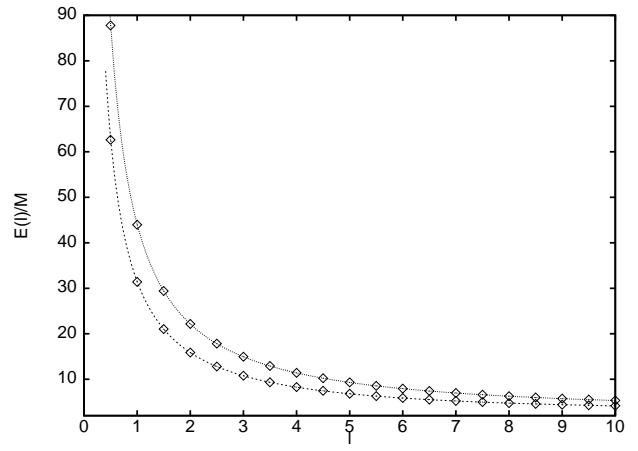
$$E \sim \mathcal{B} M^2 L \quad (6.53)$$

ahol

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{4} \tan \frac{\pi}{2\lambda}$$

a (4.14) alatti univerzális vákuum energia konstans. A DdV által meghatározott vákuum energia ellenben úgy van normálva, hogy

$$E(L) \rightarrow 0 \quad , \quad L \rightarrow \infty$$

(a) Vákuum állapot ($Q = 0$ szektor)(b) Statikus egy-szoliton állapot ($Q = 1$ szektor)(c) Két-szoliton állapotok ($Q = 2$ szektor)(d) Három-szoliton állapotok ($Q = 3$ szektor)

6.4. ábra. A DdV egyenlet és a TCSA által adott energiaszintek összehasonlítása (zérus teljes impulzusú állapotokat használva). Az energiát a szoliton tömeg egységeiben ábrázoltam, a dimenziótlanított térfogatváltozó ($l = ML$) függvényében. A TCSA adatok a pontok jelölik, a lineáris vákuum energia tag levonása után, a folytonos vonalak a DdV egyenlet numerikus iterálásával kapott eredmények. Az ábrák $\lambda = \frac{7}{2}$ sine-Gordon paraméternél készültek.

(ld. (6.50)). A termodinamika Bethe Ansatznál Zamolodchikov által alkalmazott megfontolásokkal [Zam90] analóg módon érvelve belátható, hogy a perturbált konform térelmélet energiaszintjei éppen a lineáris vákuum járulékból különböznek a DdV által adott energiaszintektől, így az összehasonlításakor ezt figyelembe kell venni. Az összehasonlítás során ezt úgy tettük meg, hogy a TCSA által jósolt energiaszintekből levontuk a vákuum energia járulékot.

Azonban ez sem működik a taszító tartományban, ahol a TCSA ultraibolya divergens (ld. 4.13 alatt). Ekkor a DdV és TCSA módszernek az energiaszintek különbségeire vonatkozó jóslatait hasonlítottuk össze. Mivel a csonkolt konform állapotter a konform spin és a topológiai töltés szerint szektorokra bontható, és a perturbáció alatt egymással csak az egy szektorban lévő állapotok keverednek, célszerű ugyanazon szektorba eső állapotok közti különbségeket képezni, hogy az ultraibolya levágási eljárás maximálisan konzisztens legyen (sőt, mivel a sine-Gordon modell paritásinvariáns, célszerű ezeket a szektorokat paritás szerint is szétbontani, bár a Feverati és Ravaninivel végzett munka idején ennek hasznosságára még nem jöttem rá).

Az eredményeket a 6.4 ábrán illusztráltam néhány eset bemutatásával.

6.6. A Zamolodchikov-féle α -csavart szektorok és a minimálmodellek $\Phi_{(1,3)}$ perturbációja

6.6.1. α -csavart szektorok

Al. B. Zamolodchikov a polimerek kapcsán végzett munkái során javasolta a sine-Gordon modell csavart szektorainak bevezetését [Zam94a, Zam94b]. Az itt alkalmazott jelölésekre lefordítva ezek a következőképpen adhatók meg. Legyen T az $x \rightarrow x + L$ (egy periódussal történő) térbeli eltolást a Hilbert-téren reprezentáló operátor. Ha n egész, akkor $V_{(n,m)}$ vertexoperátorok ez alatt invariánsak: $TV_{(n,m)}T^{-1} = V_{(n,m)}$.

A csavart határfeltétel alakja

$$TV_{(n,m)}T^{-1} = \exp(i\alpha Q) V_{(n,m)}$$

ahol Q a topológiai töltés (csavarodási szám) operátora (B.5.1-ben M -mel jelöltük). Ennek $V_{(n,m)}$ akkor tesz eleget, ha $n \in \mathbb{Z} + \frac{\alpha}{2\pi}$. Az ilyen vertexoperátorok és leszármazottaik által a konform vákuumból keltett állapotokat csavart állapotoknak nevezzük.

A

$$\mathcal{H}_\alpha = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z} + \frac{\alpha}{2\pi}} \mathcal{F}_{n,0} \quad (6.54)$$

Hilbert-teret keltő operátorok (ahol $\mathcal{F}_{n,m}$ a (B.25)-ben definiált Fock modul) egymásra kölcsönösen lokális operátoralgebrát alkotnak (ezt garantálja, hogy valamennyi primér vertex operátor konform spinje 0). Ezen a téren értelmezhető a sine-Gordon modell mint perturbált konform térelmélet Hamilton operátora:

$$H_{\text{SG}} = \frac{2\pi}{L} \left(\pi_0^2 + \sum_{k>0} a_{-k}a_k + \sum_{k>0} \bar{a}_{-k}\bar{a}_k - \frac{1}{12} \right) - \frac{\mu}{2} \int_0^L dx (V_{(1,0)} + V_{(-1,0)})$$

Az így definiált rendszer alapállapotát a következő integrálegyenlet írja le:

$$\begin{aligned} Z(\theta) = & l \sinh \theta + \alpha - i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x - i\eta) \log \left(1 + e^{iZ(x+i\eta)} \right) \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x + i\eta) \log \left(1 + e^{-iZ(x-i\eta)} \right) \end{aligned} \quad (6.55)$$

(A határozottság kedvéért $\delta = 0$ -át választottunk, hiszen α -t π -vel eltolva áttérhetünk a félegész Bethe kvantumszámokról egészekre). A vezető ultraibolya viselkedésre

$$\begin{aligned} E(L) &= -\frac{\pi\tilde{c}}{6L} + \dots \\ \tilde{c} &= 1 - \frac{6}{\lambda+1} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.56)$$

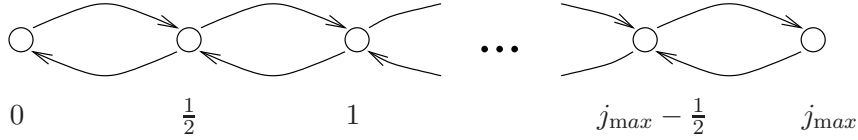
adódik. Reshetikhin és Smirnov munkájából [RS90] ismert, hogy az $\mathcal{M}_{p,q}$ Virasoro minimálmodell $\Phi_{(1,3)}$ operátorral vett (integrálható) perturbációját a

$$\lambda = \frac{q}{p} - 1 \quad (6.57)$$

paraméterrel jellemzett sine-Gordon elmélet ún. RSOS restrikcijával lehet leírni. A továbbiakban erre a modellre az $\mathcal{M}_{p,q} + \Phi_{(1,3)}$ rövid jelölést használjuk.

Az $\alpha = \pi/p$ választással

$$\tilde{c} = 1 - \frac{6}{pq}$$



6.5. ábra. Az $\mathcal{M}_{p,q} + \Phi_{(1,3)}$ kink gerjesztéseinek szomszédsági diagramja, ahol $j_{\max} = \frac{p-2}{2}$.

$\alpha = \frac{\pi}{3}$				$\alpha = \frac{2\pi}{3}$			
l	TCSA	DdV	TBA	l	TCSA	DdV	TBA
0.1	-3.074916	-3.0749130189	-3.0749130190	0.1	3.117844	3.1178476855	3.1178476853
0.3	-0.944161	-0.9441276204	-0.9441276204	0.3	0.985360	0.9853990810	0.9853990810
0.5	-0.509764	-0.5096602194	-0.5096602194	0.5	0.540427	0.5405470784	0.5405470784
0.8	-0.265436	-0.2651431026	-0.2651431026	0.8	0.282725	0.2830552991	0.2830552991
1.0	-0.186038	-0.1855606546	-0.1855606546	1.0	0.197143	0.1976769278	0.1976769278
1.5	-0.087300	-0.0861426792	-0.0861426792	1.5	0.089277	0.0905539780	0.0905539780
2.0	-0.045910	-0.0437473815	-0.0437473815	2.0	0.042960	0.0453290013	0.0453290013
2.5	-0.026746	-0.0232421927	-0.0232421927	2.5	0.019978	0.0238075022	0.0238075022
3.0	-0.017868	-0.0126823057	-0.0126823057	3.0	0.007209	0.0128843786	0.0128843786
4.0	-0.013546	-0.0039607326	-0.0039607326	4.0	-0.006592	0.0039866371	0.0039866371

6.1. táblázat. Az $\mathcal{M}_{3,5} + \Phi_{(1,3)}$ modell $\alpha = \frac{\pi}{3}$, illetve $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ csavaráshoz tartozó vákuumának energiája véges térfogatban. Az energiát és a térfogatot az M szoliton tömeg egységeiben mérjük, a TCSA adatokból levontuk a (6.53) vákuumenergia járulékot.

adódik, ami pontosan az $\mathcal{M}_{p,q}$ modell effektív centrális töltése, ezért azt várjuk, hogy a csavart egyenlet az $\mathcal{M}_{p,q} + \Phi_{(1,3)}$ (legalacsonyabban fekvő) vákuumállapotát írja le. Valóban, Fioravanti és munkatársai [FMQR97] a $q = p + 1$ unitér modellekre a (6.55) egyenletet integrálva megmutatták, hogy az eredményül kapott energiaszintek pontosan megegyeznek a korábbi ismert TBA jóslatokkal [Zam91a]. Továbbá, a csavarás következő értékeire

$$\alpha = \pm \frac{k\pi}{p}, \quad k = 1 \dots p-1 \quad (6.58)$$

a $\Phi_{(k,k)}$ operátorokra jellemző konform súlyok álltak elő az ultraibolya határesetben (a csavarás előjele ebből a szempontból lényegtelen). Reshetikhin és Smirnov megmutatta [RS90], hogy a $\mathcal{M}_{p,q} + \Phi_{(1,3)}$ modelleknek pontosan $p-1$ vákuumállapota van, az elemi gerjesztések pedig kink (a kink S mátrixokról ld. C.1.5), a 6.5 ábrán látható szomszédsági diagrammal, és megadta ezek egzakt S mátrixát is. Klassen és Melzer azt a sejtést fogalmazta meg, hogy a $q = p + 1$ unitér esetben ezek pontosan a $\Phi_{(k,k)}$ operátorokkal kelthetők [KM90]. A Fioravanti és munkatársai által ezekre az állapotokra a (6.58) csavarásokkal kapott eredmények is pontosan megegyeztek a TBA adta jóslatokkal.

Feveratival és Ravaninival azt a célt tűztük magunk elé, hogy a fentebb vázolt eredményeket terjesszük ki általános minimálmodellekre és fogalmazzuk meg egyben a gerjesztett állapotok leírását is; a következőkben ennek a munkának az eredményeit tárgyalom [FRT00]. Az alapállapotok tekintetében ez könnyen teljesíthető volt, mivel a (6.55) a (6.57)-ben megadott csatolásoknál és a (6.58) csavarásokkal könnyen megmutatható módon az általános minimálmodellek vákuumállapotait azonnal reprodukálja. Erre példaként az $\mathcal{M}_{3,5} + \Phi_{(1,3)}$ modell két alapállapotának leírását mutatom be (a 6.1 táblázat mutatja a TBA-val és TCSA-val való kitűnő egyezést).

6.6.2. A $\Phi_{(1,3)}$ perturbált minimálmodellek gerjesztett állapotai

A csavarást a (6.2) fénykúp rács Bethe Ansatzon a következőképpen lehet realizálni [dVG89]:

$$\left(\frac{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j + \Theta + \frac{i\pi}{2}] \sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j - \Theta + \frac{i\pi}{2}]}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j + \Theta - \frac{i\pi}{2}] \sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j - \Theta - \frac{i\pi}{2}]} \right)^N = -e^{-2i\omega} \prod_{k=1}^M \frac{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j - \theta_k + i\pi]}{\sinh \frac{\gamma}{\pi} [\theta_j - \theta_k - i\pi]} \quad (6.59)$$

A 6.16 alatt ismertetett módszert követve, ebből a kontinuum határesetben a következő integrálegyenlet adódik:

$$\begin{aligned} Z(\theta) = & l \sinh \theta + g(\theta|\theta_j) + \alpha - i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x - i\eta) \log \left(1 + (-1)^\delta e^{iZ(x+i\eta)} \right) \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x + i\eta) \log \left(1 + (-1)^\delta e^{-iZ(x-i\eta)} \right) \end{aligned} \quad (6.60)$$

ahol α a következő módon fejezhető ki ω -val:

$$\alpha = \omega \frac{\pi}{\pi - \gamma} + \chi_\infty \left(\left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma S}{\pi} + \frac{\omega}{\pi} \right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma S}{\pi} - \frac{\omega}{\pi} \right] \right) \quad (6.61)$$

($[x]$ az x egészrészét jelöli). Ezt a (6.12)-ban szereplő C konstans rögzítésével lehet megkapni, mégpedig úgy, hogy a Z függvénynek az integrálegyenletből számított, $\theta = \pm\infty$ -ben vett aszimptotikus értékeit összevetjük azzal, ami Z (6.7) alatti definíciójából következik. Ebből következően teljesül az

$$\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi \quad \text{ha} \quad \omega \rightarrow \omega + \pi$$

összefüggés, ami egy nagyon fontos konzisztencia feltétel⁹, hiszen mivel ω -t π -vel eltolva a (6.59) rács Bethe Ansatz egyenletek önmagukba mennek át, ennek a transzformációnak az integrálegyenletet is invariánsan kell hagynia; valóban, egy α -ban 2π -vel történő eltolás Z (és a Bethe kvantumszámok) átdefinálásával eltüntethető.

Mivel az α és ω közti összefüggés meglehetősen bonyolult, kérdéses, hogy valamennyi (6.58) alatt felsorolt α csavarás megvalósítható-e a fénykúp rács Bethe Ansatz segítségével. Tekintsük tehát most az $\mathcal{M}_{p,q} + \Phi_{(1,3)}$ modellt, amelyre (6.14) és (6.57) alapján

$$\gamma = \pi \frac{q-p}{p}$$

Korlátozódjunk semleges ($S=0$) állapotokra¹⁰. Ekkor megmutatható, hogy az

$$\omega = k\gamma = \frac{k(q-p)\pi}{p}$$

választással valamennyi szükséges α érték előáll. Mivel p és q relatív prím, ω független értékei modulo π a következők:

$$\omega = \frac{l\pi}{q}, \quad l = 0, \dots, q-1$$

és (6.61) a következő alakot ölti:

$$\alpha = \frac{l\pi}{p} + \frac{2p-q}{2p} \pi \left(\left[\frac{1}{2} + \frac{l}{q} \right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{l}{q} \right] \right)$$

Minket csak $\alpha \bmod \pi$ érdekel, mivel a δ paraméter megváltoztatása ekvivalens azzal, hogy α -t π -vel eltoljuk:

$$\alpha = \frac{l\pi}{p} - \frac{q\pi}{2p} \left(\left[\frac{1}{2} + \frac{l}{q} \right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{l}{q} \right] \right) \bmod \pi$$

és erről pedig elemi módon látható, hogy amennyiben l végigfut 0-tól $q-1$ -ig, akkor α a (6.58) alatti összes független értéket felveszi (néhányat többször is).

⁹ A P. Zinn-Justin által [ZJ98]-ban származtatott $\alpha = \omega\pi/(\pi - \gamma)$ összefüggés hibás, amint ez a fenti okfejtésből is kitűnik.

¹⁰ Az $S \neq 0$ állapotok nemlokális operátorokhoz tartoznak, ld. a későbbiekben.

6.6.2.1. Az ultraibolya határeset

Az, hogy az ultraibolya határesetben megkaphatjuk a minimálmodellek spektrumát, nagyon könnyen látható a következő módon. Egyszerűség kedvéért az érvelést a $q = p + 1$ unitér esetre korlátozom. A DdV integrálegyenlet az ultraibolyában a $V_{(n,m)}$ vertexoperátorok és leszármazottaik súlyait adja, ahol $\delta = 0, 1$ választással m egész, míg n félegész is lehet. Az $\alpha \neq 0$ választással a (6.35) plató egyenlet az

$$\Omega_{\pm} = \alpha + g_{\pm}(\mp\infty) + \frac{\chi_{\infty}}{\pi}\omega_{\pm}$$

alakot ölti. Ezzel

$$\begin{aligned}\omega_{\pm} &= \frac{2\alpha p}{p+1} \pm 2\pi (S - 2S^{\pm}) \frac{p-1}{p+1} + 4\pi \frac{p}{1+p} k_{\pm} \\ \Sigma_{\pm} &= \mp 2S^{\pm}\alpha - 4S^{\pm}(S - S^{\pm})\chi_{\infty} + 2\pi q_W^{\pm}\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\gamma = \frac{\pi}{p+1} \quad , \quad \chi_{\infty} = \pi \frac{p-1}{2p}$$

Az ultraibolya súlyokra pedig

$$\Delta^{\pm} = \frac{c-1}{24} \pm (I_H^{\pm} - 2I_S^{\pm} - I_C^{\pm} - I_W^{\pm}) + \frac{\Sigma_{\pm}}{2\pi} + \frac{p+1}{p} \frac{\omega_{\pm}^2}{16\pi^2}$$

adódik.

Az $m = 0$ semleges szektorban a fenti formulákból látható, hogy olyan $V_{(n,0)}$ vertex operátoroknak megfelelő ultraibolya viselkedést kapunk, amelyekre

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} \bmod 1$$

Behelyettesítve a

$$\alpha = \frac{l\pi}{p}, \quad k = 1, \dots, p-1$$

csavarásokat és azt, hogy

$$n = k + \frac{\alpha}{2\pi}$$

ahol k egész, valamint figyelembe véve, hogy ezúttal

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}$$

és nem 1, a következő eredmény adódik:

$$\Delta^+ = \Delta^- = \frac{(2kp+l)^2 - 1}{4p(p+1)} \tag{6.62}$$

valamint további olyan súlyok, amelyek ezektől csak egész számban különböznek, és a fenti súlyokkal jellemzett operátorok leszármaztatottjaihoz rendelhetők. Az (6.62) kifejezés pedig nem más, mint az $\Phi_{(l,l-2k)}$ operátor súlya az $\mathcal{M}_{p,p+1}$ minimálmodellben (ld. 4.2.1).

Az $m \neq 0$ állapotok súlyai hasonlóképpen számolhatók. A konform spinre a következő adódik:

$$2(\Delta^+ - \Delta^-) = m \frac{\alpha}{\pi} \bmod 1, \tag{6.63}$$

vagyis ezek általában tört spinű (nemlokális) operátorokhoz tartoznak. Ez annak felel meg, hogy a topológiailag töltött állapotok kinkekből épülnek fel, és ezek nemlokalitása többek között a sok-kink állapotok kiválasztási szabályaiban nyilvánul meg [FL92]. Periodikus határfeltétel mellett csak azok a vákuum szekvenciák maradhatnak, amelyekben a kiinduló és a végső vákuum

(a)			(b)			(c)		
l	TCSA	DdV	l	TCSA	DdV	l	TCSA	DdV
0.1	23.05277	n/a	0.1	60.75048	60.74682	0.1	123.583	123.5693
0.5	4.679779	n/a	0.5	12.20618	12.20561	0.5	24.7806	24.77936
1.0	2.447376	n/a	1.0	6.182516	6.182363	1.0	12.4870	12.48635
1.5	1.748874	n/a	1.5	4.202938	4.202915	1.5	8.42926	8.428693
2.0	1.430883	n/a	2.0	3.231734	3.231640	2.0	6.42931	6.429201
2.6	1.238051	1.238012(#)	2.5	2.662186	2.662110	2.5	5.42931	5.429201
3.0	1.164321	1.164319	3.0	2.292273	2.292231	3.0	4.48444	4.484209
3.5	1.105220	1.105196	3.5	2.035552	2.035530	3.5	3.56367	3.563519
4.0	1.068256	1.068237	4.0	1.848892	1.848849	4.0	3.04899	3.048881
5.0	1.029356	1.029348	5.0	1.599792	1.599762	5.0		

6.2. táblázat.

(a) A skálázó Lee-Yang modell első gerjesztett állapota, az energia a részecske m tömegének egységeiben adott, a dimenziótlan térfogatváltozó pedig $l = mL$. $l < 2.6$ -ra a DdV egyenletet nem tudtam konvergens módon iterálni (ennél a térfogatnál egy speciális gyök jelenik meg, azaz Z a valós egyenes egy részén monoton csökkenőbe vált).

(b) A skálázó Lee-Yang modell egy $p = \frac{2\pi}{L}$ impulzussal mozgó részecskét tartalmazó állapota

(c) A skálázó Lee-Yang modell legalacsonyabban fekvő kétrészecske állapota

azonos, ezek viszont töltetlen állapotok. Ez azt jelenti, hogy a minimális modell Hilbert terét a hengeren a

$$\bigoplus_{l=1}^{p-1} \mathcal{H}_{\alpha = \frac{l\pi}{p}}$$

tér altereként állítjuk elő, ahol a \mathcal{H}_α csavart szektort (6.54) definiálja. Az, hogy a minimálmodell Hilbert-tere nem lehet az egész, látható pl. abból, hogy (6.62)-ben k csak olyan értékeket vehet fel, amelyekre $1 \leq l - 2k \leq p$.¹¹

6.6.2.2. Összehasonlítás a csonkolt konform állapottér közelítéssel

Eredeti munkánkban [FRT00] számos különböző modellel elvégeztük az egybevetést. Itt most csak az $\mathcal{M}_{2,5} + \Phi_{(1,3)}$ skálázó Lee-Yang modellre vonatkozó eredményeket idézem. Ekkor a csavarás egyetlen független értéke

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Ha α -t így rögzítjük, akkor még megmarad a szabadságunk a δ kvantálási paraméter megválasztására. A gerjesztett állapotokat a megfelelő sine-Gordon modell B_1 első lélegzője által alkotott sokrészecske állapotok adják, ahol a sine-Gordon paraméter

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

A B_1 lélegzőket 6.2.3 alapján önkonjugált gyökök reprezentálják, amelyek valós része a lélegző rapiditásával egyezik meg. Tehát az összes állapot megkapható a (6.60) integrálegyenlet olyan megoldásai segítségével, amelyekre a csavarás $\alpha = \pi/2$ és a forrástag (az infravörösben) egy vagy több önkonjugált gyököt tartalmaz (a vákuum esetén természetesen egyet sem). Az ultraibolya súlyok vizsgálatával a kvantálási szabályra a

$$\delta = M_{sc} \bmod 2$$

¹¹ Az érdeklődő további részleteket találhat erről a projekcióról Felder és LeClair munkájában [FL92]. Megjegyzem, hogy ez nem más, mint a minimálmodellek szabadtér reprezentációjakor elvégzendő BRST projekció (ld. [Fel89]) tömeges megfelelője.

előírás adódik, ahol M_{sc} az önkonjugált gyökök számát jelöli. A 6.2 táblázatban a nyugvó egyrészecske, az $I = 1$ kvantumszámmal mozgó egyrészecske (impulzusa $p = \frac{2\pi}{L}$), illetve a legalacsonyabban fekvő kétrészecske ($I_1 = -I_2 = 1/2$) állapot integrálegyenletből energiáját hasonlítom össze a TCSA numerikus jóslataival. Az összehasonlításhoz a lélegző tömegét használtam skálaként, ami a sine-Gordon szoliton tömegével az

$$m = 2M \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}M$$

módon fejezhető ki. A TCSA adatokból levontam a

$$\mathcal{B}m^2L$$

vákuumenergia járulékot, ahol a \mathcal{B} univerzális vákuumenergia konstans értékét (C.7) adja meg.

7. Alkalmazások kvantumtérelméleti problémákra

Ebben a fejezetben az eddig tárgyalt ismeretek olyan alkalmazásait ismertetem, amelyek saját munkám során fordultak elő.

Elsőként az ún. k -hajtogatott sine-Gordon modellt tárgyalom, amely számos érdekességet tartalmaz. Látni fogjuk, hogyan jelentkezik a 4.2.2 alatt jelzett többértelműség az állapotter megválasztásában, és ennek kapcsán egy nagyon érdekes elméleti modellt kapunk, ahol a kvantumtérelméleti alagúteffektus leírásából jól ismert ritka instanton gáz közelítés jóslatai egészen konkrét módon összevethetők a DdV egyenlet és a TCSA módszer útján kapott eredményekkel. Ennek során a véges térfogatbeli vákuumfelhasadásról megmutatom, hogy a vákuumok közti alagutazással értelmezhető. Továbbá itt fogunk először példát látni kink típusú gerjesztésekre, és ennek a példának a későbbiekben a perturbált konform térelméletek spektrumának elemzésekor fontos szerep jut. Végül, de nem utolsósorban a modell ismerete szükséges előfeltétel a kétfrekvenciás sine-Gordon modell analíziséhez.

Ezután a kétfrekvenciás sine-Gordon modellt tárgyalom, aminek elméleti érdekessége egyrészt abban rejlik, hogy a nemintegrálható kvantumtérelméletek egyfajta prototípusának tekinthető. Másrészt a modell alkalmazható a tömeges Schwinger modell, az általánosított Ashkin-Teller modell (egy kvantum spin rendszer), és az egydimenziós Hubbard modell tanulmányozására is [DM98, FGN00]. Egy további érdekes alkalmazási lehetőség ultra-rövid optikai impulzusok degenerált rezonáns médiumban történő terjedésének modellezése [BCG].

A kétfrekvenciás sine-Gordon modell kapcsán röviden ismertetem az ún. form-faktor perturbációszámítást, ami alkalmas arra, hogy ilyen elméletekről nemperturbatív információt nyerjünk, mivel eleve egy nemtriviálisan kölcsönható és nemperturbatív egzaktnak megértett integrálható kvantumtérelmélet körüli sorfejtésből indul ki. Látni fogjuk, hogyan alkalmazható a TCSA módszer arra, hogy a szemiklasszikus közelítéssel kapcsolatos elméleti problémákat eldönthessük, és hogyan lehet a segítségével feltérképezni az elmélet fázisdiagramját, meghatározva a lehetséges fázisátalakulások helyét és típusát.

A nemintegrálható modellek annyiban is jóval közelebb állnak az integrálhatóknál a valósághoz, hogy segítségükkel instabil részecskék (rezonanciák) is modellezhetők¹. Ezt a kétfrekvenciás sine-Gordon modell és az Ising modell példáján mutatom be, és az ezeken végzett vizsgálatok során kifejleszttek egy hatékony módszertant a keskeny rezonanciák leírására és paramétereik meghatározására a véges térfogati spektrumból. A végesméret spektrum meghatározására a TCSA módszert, az elméleti jóslatok leszámaztatására a form-faktor perturbációszámítást használok, amik közül az első teljes mértékben a kétdimenziós térelméletekre specifikus eljárás, a második megfelelője magasabb dimenzióban is ismert ugyan (hadronok gyenge bomlásának leírása), de ott nem ismertek az egzaktnemperturbatív form-faktorok². Ennek ellenére a munka lényegi mondanivalója, miszerint a rezonanciákat a spektrumban mutatkozó jellegzetes szint elkerülések segítségével lehet hatékonyan jellemezni, valamint az erre szolgáló módszer, teljesen természetes módon általánosítható magasabb dimenziós térelméletekre. Ráadásul a módszer maga nem

¹ Itt megjegyzem, hogy ismertek olyan integrálható térelméletek, amelyek tartalmaznak rezonanciákat [FPGHM97, MFP00], azonban ezek nem felelnek meg a jelen vizsgálatokhoz, főképpen mivel a gerjesztett állapotok véges térfogatbeli leírására nem ismeretes hatékony és részleteiben kidolgozott eljárás. Másfelől pedig a nemintegrálható perturbációk előnye az is, hogy az integrálhatóságot sértő csatolás segítségével a bomlás hangolható, sőt teljesen ki is kapcsolható.

² A rácstérelmélet jelenlegi dinamikus fejlődése alapján remélhető, hogy a megfelelő form-faktorok hamarosan elég nagy pontossággal (numerikusan) rendelkezésre állnak majd.

függ sem attól, hogyan állítjuk elő a végesméret spektrumot, sem pedig magától a form-faktor perturbációszámítástól, így (mint azt majd röviden tárgyalom) olyankor is alkalmazható, amikor a bomlást okozó kölcsönhatás nem szeparálható a részecskét létrehozótól (a fenomenológiában ezek az „erős” bomlások, amikor a hadron nem a gyenge, hanem az erős kölcsönhatáson keresztül bomlik).

A fejezet záró részében azt tárgyalom, hogy a végesméret effektusoknak a Bethe-Yang egyenletek segítségével történő tárgyalása hogyan visz közelebb a nemunitér kvantumtérelméletek megértéséhez. Az ilyen elméletek iránt érdeklődés oka részben az, hogy az egyik legfontosabb családjukat adó imagináriusan csatolt affin Toda elméletek a legegyszerűbb olyan térelméletek, amelyek a sine-Gordon szolitonok dinamikáját magasabb csoport szimmetria esetére általánosítják, ezenfelül redukció révén fontos szerepet játszanak perturbált konform térelméletek (köztük unitér modellek) leírásában. Nemunitér elméletek alkalmazhatók továbbá olyan problémák leírására, amikor nem a valószínűségi értelmezés áll az alkalmazás központjában, pl. diffúziós-annihilációs folyamatokra [ADHR94] vagy rendezetlen statisztikus fizikai rendszerekben [MCW96, BCKT01]. Az utóbbi alkalmazásokra irányul a szupercsoportokon értelmezett σ modellek jelenleg nagyon aktívan zajló kutatása [RS01, SWK02, SWK03], amitől a rendezetlen rendszerekben zajló fázisátalakulások univerzalitási osztályainak klasszifikálása várható; az $OSP(1|2n)$ σ -modell egzakt S -mátrixáról pedig kiderült [SWK03], hogy közeli kapcsolatban áll az imagináriusan csatolt $a_{2n}^{(2)}$ affin Toda térelmélet S mátrixával, a két elmélet nemlokális megmaradó mennyiségeinek algebraja között fennálló kapcsolat alapján. Másfelől pedig érdeklődés mutatkozik az imaginárius affin Toda elméletek termodinamikája iránt is [SWK00], ami a sokcsatornás Kondó probléma modellezésével függ össze. A nemunitér kvantumtérelméletek mélyebb megértésére tett erőfeszítéseinket ezek a problémák motiválják.

7.1. A k -hajtogatott sine-Gordon modell

7.1.1. A lokális operátor algebra megválasztása

Mint azt (B.27)-t követően tárgyaltuk, periodikus határfeltételek mellett általában két maximális, az operátor szorzatra zárt lokális algebra adható meg, amiket a következő vertex operátorok generálnak [KM93]:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b &= \{V_{(n,m)} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{A}_f &= \{V_{(n,m)} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} + m/2\}\end{aligned}\tag{7.1}$$

Azonban (ld. 4.2.2) a perturbáló operátor azonosítása nem egyértelmű: a $\cos \beta \Phi$ operátort egy tetszőleges $\frac{1}{2}(V_{k,0} + V_{-k,0})$ kombinációval azonosíthatjuk, ahol k pozitív egész szám. Ekkor a kompaktifikációs sugár (4.11) alapján:

$$r = k \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta}$$

Azt viszont mindig megtehetjük, hogy a kompaktifikációs sugarat átdefiniáljuk az

$$r = \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta}$$

ezzel

$$: \cos \beta \Phi := \frac{1}{2}(V_{1,0} + V_{-1,0})\tag{7.2}$$

marad k -től függetlenül, azonban ekkor a vertex operátorok (B.22) definíciója alapján a (7.1) algebrákat a következő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b^{(k)} &= \{V_{(n/k, km)} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{A}_f^{(k)} &= \{V_{(n/k, km)} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} + m/2\}\end{aligned}\tag{7.3}$$

A továbbiakban a k -hajtogatott sine-Gordon (illetve tömeges Thirring modellt) úgy tárgyalom, hogy a perturbáló operátort (és ezzel a kompaktifikációs sugár azonosítását) fixen tartom (7.2) szerint, a Hilbert-teret a k hajtogatási számnak megfelelően a (7.3) szerinti vertexoperátorok és azok leszármaztatottai keltik. A 6.6.2 alatt tárgyaltak alapján ezen elméletek spektrumát az

$$Z(\theta) = ML \sinh \theta + g(\theta|\theta_j) + \alpha - i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x - i\eta) \log \left(1 + (-1)^\delta e^{iZ(x+i\eta)} \right) + i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x + i\eta) \log \left(1 + (-1)^\delta e^{-iZ(x-i\eta)} \right) \quad (7.4)$$

integrálegenlettel írhatjuk le, ahol a csavarás megengedett értékei:

$$\alpha = \frac{2\pi l}{k} \quad , \quad l = 0, 1, \dots, k-1$$

és a 6.4 alatt leírtak alapján

$$\begin{aligned} \text{bozonikus modell :} & \quad \delta = 2S \bmod 2 \\ \text{fermionikus modell :} & \quad \delta = 0 \end{aligned}$$

továbbá a topológiai töltést meg kell szorítanunk

$$Q = N_H - 2N_S - M_C - 2M_W\theta(1 - \lambda) \in k\mathbb{Z} \quad (7.5)$$

szerint.

7.1.2. Instantonok és ϑ -vákuum véges térfogatban

7.1.2.1. Ritka instanton gáz közelítés

A sine-Gordon modell vákuuma periodikus szerkezetű, ennek megfelelően a QCD-ből jól ismert ϑ -vákuumok megjelenésére számíthatunk, és ezek energiáját a ritka instanton gáz közelítésben számíthatjuk.

A sine-Gordon modellt véges L térfogatban a következő euklidészi hatással fogalmazzuk meg:

$$S_E[\Phi] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(\frac{1}{2} (\partial_\tau \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \Phi)^2 + \frac{\mu_0^2}{\beta^2} (1 - \cos \beta \Phi) \right). \quad (7.6)$$

A téregyenletek rendelkeznek a

$$\Phi_{\text{inst}} = \frac{4}{\beta} \arctan \exp (\mu_0 (\tau - \tau_0)) \quad (7.7)$$

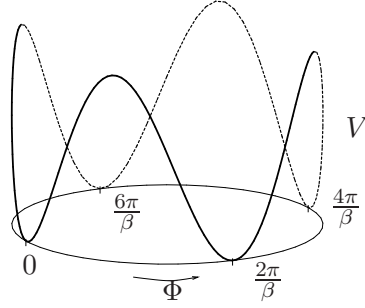
instanton megoldással, amelynek hatása:

$$S_E [\Phi_{\text{inst}}] = \frac{8\mu_0}{\beta^2} L = M_{\text{class}} L$$

ahol M_{class} a klasszikus szoliton tömeg³. Az instanton kalkulus standard eljárását, az euklidészi pályaintegrál nyeregponthoz közelítését [Mun89] használva a következőt kapjuk a ϑ -vákuumok közti felhasadás mértékére:

$$\Delta E(\vartheta) = -2 \cos(\vartheta) \left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|^{-1/2} \left(\frac{S_E [\Phi_{\text{inst}}]}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-S_E [\Phi_{\text{inst}}]}, \quad (7.8)$$

³ Az instanton megoldás tulajdonképpen nem más, mint egy sztatikus szoliton megoldás a τ változóban.

7.1. ábra. Vákuumok $k = 4$ esetén

ahol az

$$M = -\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + V''(\Phi_{\text{inst}}), \quad M_0 = -\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + V''(0)$$

operátorok az instanton (illetve a vákuum) körüli kvadratikus fluktuációkat írják le, $\det' M$ pedig M determinánsát jelenti a nullmódusok elhagyásával, és a

$$\left(\frac{S_E[\Phi_{\text{inst}}]}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (7.9)$$

faktor az instanton megoldás egyetlen (τ_0 -beli eltolásnak megfelelő) nullmódusának járuléka. A $\cos \vartheta$ függés a ϑ -vákuum alábbi kifejtéséből ered:

$$|\vartheta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\vartheta} |n\rangle$$

ahol $|n\rangle$ a $\Phi = \frac{2\pi}{\beta}n$ klasszikus vákuum megoldásnak megfelelő kvantumállapot.

A determináns tag a hővezetési magfüggvény módszerrel („heat kernel method”) egzaktul kiszámítható, az energia felhasadásra adódó végeredmény pedig⁴:

$$\Delta E(\vartheta) = -M \sqrt{\frac{2}{\pi l}} e^{-l} \cos \vartheta, \quad l = ML \quad (7.10)$$

ahol M a sine-Gordon szoliton kvantum tömege (a tömegrenormálást – egy-hurok rendig bezárólag – a determinánsok kiszámításakor figyelembe vett ellentagok végzik el).

7.1.2.2. Vákuum szerkezet a k -hajtogatott sine-Gordon modellben

A k -hajtogatott modellben a sine-Gordon mezőt pontosan k periódus után azonosítjuk:

$$\Phi \sim \Phi + \frac{2\pi}{\beta}k. \quad (7.11)$$

A potenciált a 7.1 ábra illusztrálja, a klasszikus alapállapotok

$$\Phi_n = \frac{2\pi}{\beta}n, \quad n = 0, \dots, k-1 \quad (7.12)$$

Az ennek megfelelő modellt (amelynek lokális operátoralgebráját az ultraibolya fixpontban a (7.3) alatti $\mathcal{A}_b^{(k)}$ adja meg) $\text{SG}(\beta, k)$ -val fogom jelölni. A végtelen térfogatú ($L = \infty$) kvantumelméletben ezeknek a megoldásoknak az $|n\rangle$ vákuumállapotok felelnek meg, amelyekre

$$\langle n | \Phi(x, t) | n \rangle = \frac{2\pi}{\beta}n \quad (7.13)$$

⁴ A részletes számítást ld. a [BPTW00] cikkben.

Az elmélet szimmetriáját egyfelől egy, a vákuumok peridocitását implementáló T operátor generálja

$$T\Phi(x, t)T^{-1} = \Phi(x, t) - \frac{2\pi}{\beta} \quad (7.14)$$

amire

$$T|n\rangle = |n+1 \bmod k\rangle \quad (7.15)$$

és a sajátvektorai a „Bloch-hullámok”:

$$|\vartheta_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=0}^{k-1} e^{im\vartheta_n} |m\rangle \quad , \quad \vartheta_n = \frac{2\pi}{k}n \quad (7.16)$$

$$T|\vartheta_n\rangle = e^{-i\vartheta_n} |\vartheta_n\rangle \quad (7.17)$$

amelyek egyben a Hamilton operátornak is sajátállapotai. Véges térfogatban az $|n\rangle$ állapotok közötti (az instanton által leírt) alagutazás megszünteti az alapállapot degenerációját, és a sajátállapotok a (7.16) ϑ -vákuumokkal egyeznek meg. A T által generált \mathbb{Z}_k szimmetriacsoport mellett bevezethető egy $S \mathbb{Z}_2$ transzformáció is:

$$S\Phi(x, t)S^{-1} = -\Phi(x, t) \quad , \quad S^\dagger = S^{-1} = S \quad (7.18)$$

ami a vákuumállapotokon a következőképpen hat:

$$S|n\rangle = |k-n\rangle = |-n\rangle \quad , \quad S|\vartheta_l\rangle = |-\vartheta_l\rangle = |\vartheta_{k-l}\rangle \quad , \quad (7.19)$$

S és T a \mathbb{D}_k diszkrét csoportot generálja.

A (7.11) azonosítás a következőben a

$$V_m =: \exp\left(i\beta\frac{m}{k}\Phi\right) : \quad (7.20)$$

operátorok m egész értékeire jól definiáltak, és

$$TV_mT^{-1} = e^{-\frac{2\pi i}{k}m}V_m \quad , \quad SV_mS^{-1} = V_{-m} \quad (7.21)$$

Véges térfogatban az instantonok indukálta alagúteffektus megszünteti az alapállapot degenerációját; a legalacsonyabb energiájú állapot az, amelyik \mathbb{D}_k invariáns. Mivel a (vákuumok kifesztette altérre megszorított) Hamilton operátor a diszkrét szimmetriával felcserél, ezért a csoport-algebra centrumában kell lennie. A centrum legáltalánosabb eleme

$$H = E_0(L)\mathbb{I} + \tilde{E}_1(L)(T + T^{-1}) + \dots + \tilde{E}_i(L)(T^i + T^{-i}) + \dots$$

Ennek sajátállapotai pontosan a $|\vartheta_m\rangle$ állapotok, a következő sajátértékekkel:

$$H_m = E_0(L) + \sum_{j=1}^{[k/2]} E_j(L) \cos\left(\frac{2\pi}{k}jm\right) \quad , \quad m = 0, \dots, k-1 \quad , \quad 2\tilde{E}_j = E_j \quad (7.22)$$

A csavart vákuum DdV egyenlete a következő alakú:

$$\begin{aligned} Z(\theta) = ML \sinh \theta + \vartheta & - i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x - i\eta) \log\left(1 + e^{iZ(x+i\eta)}\right) \\ & + i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x + i\eta) \log\left(1 + e^{-iZ(x-i\eta)}\right) \end{aligned}$$

Nagy térfogatban

$$Z(x) \approx \vartheta + l \sinh(\theta) \quad , \quad l = ML \quad (7.23)$$

Ezt behelyettesítve az energia

$$E(L) = -2M\Im m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \sinh(x + i\eta) \log \left(1 + e^{iZ(x+i\eta)} \right) , \quad (7.24)$$

kifejezésébe, η értékét eltolhatjuk $\pi/2$ -ig mivel az integrandusnak ebben a tartományban nincs szingularitása:

$$E(\vartheta, L) = -M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \cosh(x) \left[\log \left(1 + e^{i\vartheta - l \cosh x} \right) + \log \left(1 + e^{-i\vartheta - l \cosh x} \right) \right] . \quad (7.25)$$

A logaritmus függvényt Taylor-sorba fejtve

$$E(\vartheta, L) = -\frac{2M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} K_1(nl) \cos n\vartheta \quad (7.26)$$

ahol $K_1(z)$ másodfajú Bessel-függvény:

$$K_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2} \cosh(x) e^{-z \cosh x}$$

A K_1 függvény aszimptotikáját felhasználva látható, hogy nagy l -re az $n = 1$ tag adja a vezető járulékot:

$$\frac{E(\vartheta, L)}{M} = -\sqrt{\frac{2}{\pi l}} e^{-l} \cos \vartheta + \dots \quad (7.27)$$

ami tökéletes összhangban van a ritka instanton gáz közelítésből kapott (7.10) eredménnyel. Ha most behelyettesítjük a

$$\vartheta_m = 2\pi \frac{m}{k} \quad , \quad m = 0, \dots, k-1$$

értékeket, akkor a DdV eredmény a (7.22) alattival teljesen összhangban van. A fenti eredményeket összevetettük a csonkolt konform állapotter adta numerikus adatokkal is, és kitűnő egyezést találtunk [BPTW00].

7.1.3. A hajtogatott modell spektruma és S mátrixa

A sine-Gordon modell szoliton megoldása a k -hajtogatott modellben kink típusú gerjesztést ír le. Az $SG(\beta, k)$ modell sztatikus kink megoldásai a következők:

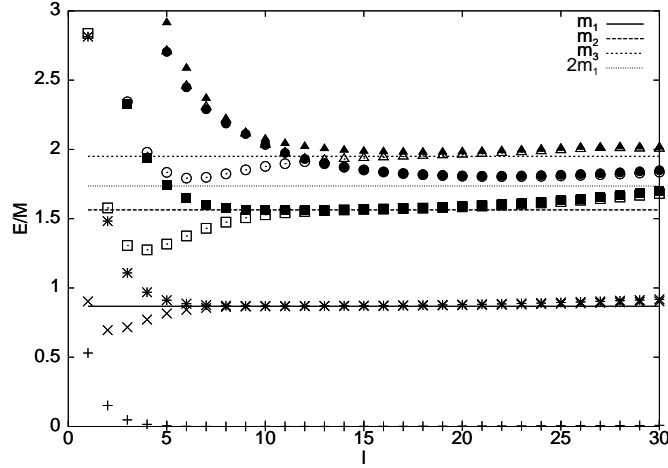
$$K_{n,n+1}(x, t) = \frac{4}{\beta} \arctan e^{\mu_0(x-x_0)} + \frac{2n\pi}{\beta} \quad n = 0, \dots, k-1; k \equiv 0. \quad (7.28)$$

(az antikinket a $\Phi \mapsto -\Phi$ reflexióval állíthatók elő). A vákuumok szomszédsági viszonyai (amelyek egy cirkuláris elrendezést tükröznek, ahol a k -adik vákuum azonos a 0-adikkal) azt jelentik, hogy a modell spektruma a C.1.5 alattiaknak megfelelő módon megszorítást tartalmaz a sok-kink állapotokra.

Az $SG(\beta, k)$ modellben minden lélegzőnek k különböző állapot felel meg, amelyek mindegyike valamelyik vákuum körül oszcillál. A klasszikus megoldásban a lélegző spektrum folytonos

$$B_{\nu}^{(n)}(x, t) = \frac{4}{\beta} \arctan \frac{\sin \left(\frac{\mu_0 v t}{\sqrt{1+v^2}} \right)}{v \cosh \left(\frac{\mu_0 x}{\sqrt{1+v^2}} \right)} + \frac{2n\pi}{\beta} , \quad v \in \mathbb{R} , \quad n = 0, \dots, k-1. \quad (7.29)$$

Kvantumszinten a (diszkrét tömegspektrumú) lélegző állapotok k -szorozódására egy alátámasztást TCSA numerikus adatokkal a 7.2 ábra mutat.



7.2. ábra. Lélegző állapotok 2-hajtogatott modellben $\lambda = 7/2$ mellett, ahol feltüntettem a (C.12) egzakt jóslatokat is, illetve a kétrészecske állapotok alsó határát.

A Q_k topologikus töltés azt jellemzi, hogy hányszor járja be a $\Phi(t, x)$ mező a periódusát, miközben x végigfut $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig:

$$Q_k = \frac{\beta}{2k\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \Phi dx \quad (7.30)$$

Ennek megfelelően az egy-kink megoldás $1/k$ tört topológiai töltéssel rendelkezik, vagyis az egész töltésű konfigurációkban a kinkok száma k egész számú többszöröse kell legyen, (7.5)-nek megfelelően.

A C.1.5 alatti jelöléseket használva, a kinkek szórásfolyamatai

$$K_{ab}(\theta_1) + K_{bc}(\theta_2) \rightarrow K_{ad}(\theta_2) + K_{dc}(\theta_1)$$

akkor megengedettek, ha $|a-b| = |b-c| = |a-d| = |b-d| = 1$, és az el nem tűnő szórásamplitúdók kifejezhetők a sine-Gordon modell (C.11) egzakt S mátrixával:

$$\begin{aligned} S_{aa+1}^{a+1a+2}(\theta_1 - \theta_2) &= S_{aa-1}^{a-1a-2}(\theta_1 - \theta_2) = S_{++}^{++}(\theta_1 - \theta_2) \\ S_{aa+1}^{aa+1}(\theta_1 - \theta_2) &= S_{aa-1}^{aa-1}(\theta_1 - \theta_2) = S_{+-}^{+-}(\theta_1 - \theta_2) \\ S_{aa+1}^{aa-1}(\theta_1 - \theta_2) &= S_{aa-1}^{aa+1}(\theta_1 - \theta_2) = S_{-+}^{-+}(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

ahol az a , $a \pm 1$, $a \pm 2$ vákuumindexek modulo k értendők. Ehhez hasonlóan a

$$B_n^{(m)}(\theta_1) + K_{m,m+1}(\theta_2) \rightarrow K_{m,m+1}(\theta_2) + B_n^{(m+1)}(\theta_1)$$

kink lélegző szórását leíró amplitúdó:

$$S_{(m)}^n(\theta_1 - \theta_2) = S^n(\theta_1 - \theta_2) \quad (7.31)$$

ahol $S^n(\theta)$ a (C.15) lélegző-szolon S mátrix. A lélegzők

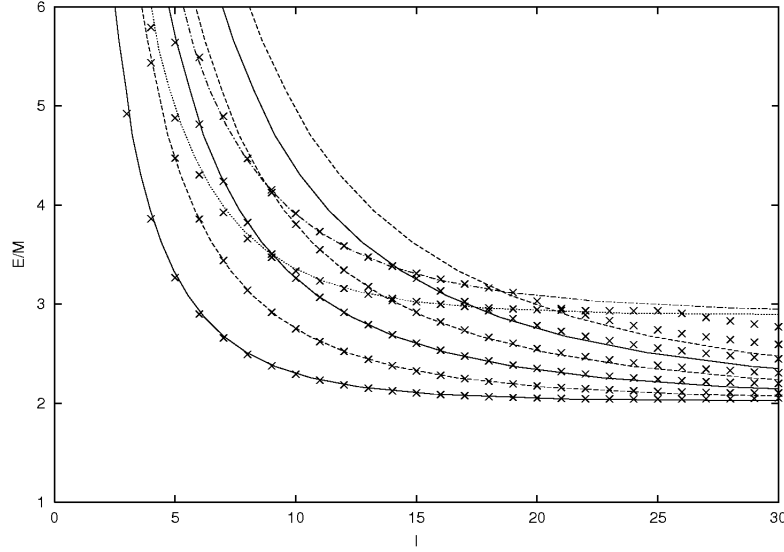
$$B_n^{(k)}(\theta_1) + B_m^{(k)}(\theta_2) \rightarrow B_m^{(k)}(\theta_2) + B_n^{(k)}(\theta_1)$$

szórását pedig az

$$S_{(k)}^{n,m}(\theta_1 - \theta_2) = S^{n,m}(\theta_1 - \theta_2)$$

amplitúdó írja le, ahol $S^{n,m}$ a (C.14) lélegző-lélegző amplitúdó.

A 5.1.1 alatt tárgyalt Bethe-Yang egyenleteket felhasználva, a fenti szórásamplitúdókat könnyen össze lehet vetni a DdV infravörös határesetével, illetve a numerikus TCSA spektrummal. Valamennyi esetben tökéletes egyezést találtunk [BPTW00], a 7.3 ábrán a TCSA-val való egybevetésre mutatok egy példát.



7.3. ábra. A TCSA adatok (pontok) és a Bethe-Yang jóslat (folytonos vonalak) összevetése a $SG(\beta = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, 2)$ modell $Q = 1$ topológiai töltésű szektorában

7.1.4. Exponenciális operátorok vákuum várható értéke

Ebben a részben a (7.20) alatti exponenciális operátorok vákuum várható értékeit elemezzük, és ennek kapcsán alátámasztunk egy, Lukyanov és A. B. Zamolodchikov által megfogalmazott sejtést ezek egzakt értékéről. Ehhez érdemes bevezetnünk az $|n\rangle$ vákuumállapotok véges térfogatbeli megfelelőit a

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{n=0}^{k-1} e^{-im\vartheta_n} |\vartheta_n\rangle$$

definícióval. Az alábbiakban tetszőleges L térfogatban dolgozunk, de a térfogatfüggést explicite nem tüntetjük fel. A T szimmetriagenerátor (7.17) és (7.21) alatt felírt hatása alapján

$$\langle \vartheta_n | V_m | \vartheta_r \rangle = A_m(r) \delta_{n,m+r} \quad , \quad \langle n | V_m | r \rangle = B_m(r-n) e^{\frac{2\pi i}{k} mn} \quad (7.32)$$

ahol $A_m(r)$ ismeretlen amplitúdók.

$$B_m(r) = \langle 0 | V_m | r \rangle = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\frac{2\pi i}{k} nr} A_m(n). \quad (7.33)$$

Mivel Φ önkonjugált,

$$V_m^\dagger = V_{-m} \Rightarrow B_m(r)^* = e^{\frac{2\pi i}{k} rm} B_{-m}(-r)$$

Az S szimmetriából

$$B_m(r) = B_{-m}(-r)$$

amiből következően $B_m(r)$ fázisa előjel erejéig rögzíthető:

$$B_m(r) = e^{\frac{\pi i}{k} rm} F_m(r) \quad , \quad F_m(r) \in \mathbb{R} \quad (7.34)$$

Azonban az F_m amplitúdók sem függetlenek. A B.6.1 alattiakból könnyen látható, hogy a standard Fock bázisban V_m minden mátrix eleme valós. Emiatt a Hamilton operátor mátrixa valós és szimmetrikus, és következésképpen minden sajátvektor összes komponense valós. Ezért az összes $\langle \vartheta_n | V_m | \vartheta_r \rangle$ várható érték valós, amiből viszont azt kapjuk, hogy

$$F_m(r) = (-1)^m F_m(k-r), \quad r = 1, \dots, k-1 \quad (7.35)$$

vagyis a vákuum várható értékek a következő valós amplitúdókkal adhatók meg:

$$F_m(r) \quad , \quad r = 0, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \quad (7.36)$$

Lukyanov és Zamolodchikov egy egzakt formulát javasolt a standard sine-Gordon modellben az exponenciális operátorok várható értékeire végtelen térfogatban [LZ97]. Legyen $|0\rangle$ az $|n\rangle$ állapot $n = 0$ esetén és

$$\mathcal{G}(a) = \langle 0 | e^{ia\Phi(x)} | 0 \rangle$$

ekkor a Lukyanov-Zamolodchikov sejtés a következőt állítja:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(a) = & \left[\frac{M\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2\lambda}\right)} \right]^{\frac{a^2}{4\pi}} \times \\ & \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{\sinh^2\left(\frac{a\beta}{4\pi}t\right)}{2\sinh\left(\frac{1}{\lambda+1}t\right)\sinh(t)\cosh\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}t\right)} - \frac{a^2}{4\pi}e^{-2t} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (7.37)$$

ha

$$\beta^2 < 8\pi \quad \text{és} \quad |\Re e a\beta| < 4\pi \quad (7.38)$$

A fenti jelölésekkel:

$$\mathcal{G}\left(\frac{m\beta}{k}\right) = F_m(0) \quad \text{ha} \quad l = ML = \infty.$$

A TCSA-ból a (2.5) exponenciális leképezéssel kapott konform síkon számolt vákuum várható értékeket kaphatjuk meg, a leképezés eredménye egy extra

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{m^2\beta^2}{4\pi}}$$

faktor, ami a V_m operátor mint $\Delta = \bar{\Delta} = \frac{m^2\beta^2}{8\pi}$ súlyú primér tér transzformációjából adódik. Bevezetve a dimenziótlanított

$$g(a) = M^{-2\Delta_a} \mathcal{G}(a)$$

menyiséget és feltüntetve az l -függést:

$$\tilde{F}_m(0)[l] = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \tilde{A}_m(n)[l] = \frac{l^{2\Delta_a}}{(2\pi)^{2\Delta_a}} g(a) N(l) \quad , \quad a = \frac{m\beta}{k} \quad (7.39)$$

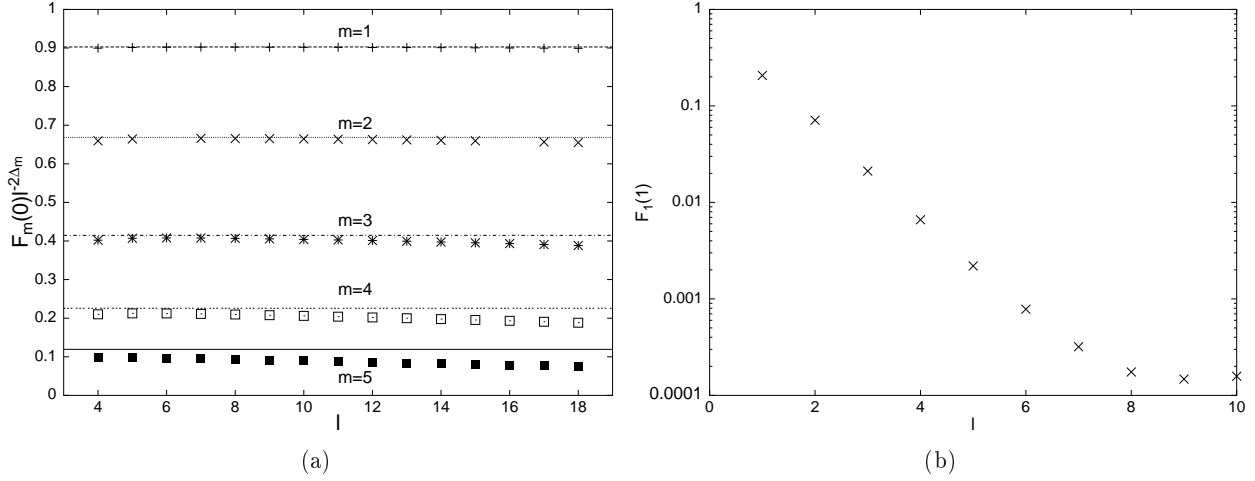
ahol $\tilde{\sim}$ a síkon vett várható értékre utal és $N(l)$ egy végesméret korrekciós faktor, amiről tudjuk, hogy $N(l) \rightarrow 1 + O(e^{-l})$, ha $l \rightarrow \infty$.

Az $F_m(r)$ amplitúdókra sajnos nincs hasonló jóslatunk, ha $r \neq 0$, vezető viselkedésüket azonban könnyen kitalálhatjuk. A

$$\langle 0 | V_m | r \rangle$$

mátrixelemek végtelen térfogatban eltűnnek, mert az $|n\rangle$ állapotok mindegyike egy különálló Hilbert-térben fekszik, amelyek között nem visz át semmilyen lokális operátor. Véges térfogatban a vákuumok közötti alagúteffektus miatt kapnak nemzérus járulékot, de a 7.1.2.1 ritka instanton gáz számításból tudjuk, hogy az alagúteffektus amplitúdója exponenciálisan eltűnik nagy térfogatban:

$$\langle 0 | V_m | r \rangle \sim e^{-l} \quad \text{ha} \quad l \gg 1 \quad \text{és} \quad r \neq 0 \quad (7.40)$$



7.4. ábra. Exponenciális operátorok vákuum várható értékeinek mérése

(a) Lukyanov-Zamolodchikov sejtés ellenőrzése: a diszkrét pontok a TCSA adatok

(b) $F_1(1)[l]$ lecsengése

A fentieket az

$$\text{SG} \left(\beta = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}, 3 \right)$$

3-hajtogatott modellben teszteltük ($\lambda = 7/2$). A három alapállapotnak megfelelő TCSA sajátvektort felhasználva kiszámítottuk az $\tilde{A}_m(n)[l]$ mennyiségeket az $m = 1, \dots, 5$ operátorokra. Ezután (7.39)-nek megfelelően a $\tilde{F}_m(0)[l]l^{-2\Delta_m}$ kombinációkat ábrázoltuk l függvényében, ahol

$$2\Delta_m = \frac{m^2\beta^2}{4k^2\pi} \quad (k=3)$$

Az eredmény a 7.4 (a) ábrán látható, ahol a vízszintes vonalak a Lukyanov-Zamolodchikov-féle

$$(2\pi)^{-2\Delta_m} g \left(\frac{m\beta}{k} \right)$$

jóslatot mutatják. Az egyezés jó, de a nagyobb m értékekre mutatott eltérések azt jelzik, hogy érdemes lenne levágásban és térfogatban extrapolációt alkalmazni. Ugyanebben a modellben $F_m(1)[l]$ -t is meghatároztuk, az eredményeket egy logaritmikus skálán a 7.4 (b) ábrán mutatom be. Látható, hogy az adatok viselkedése teljesen konzisztens a (7.40)-ből várt exponenciális lecsengéssel (a nagy l tartományban látható eltérést a csonkolási hibák okozzák).

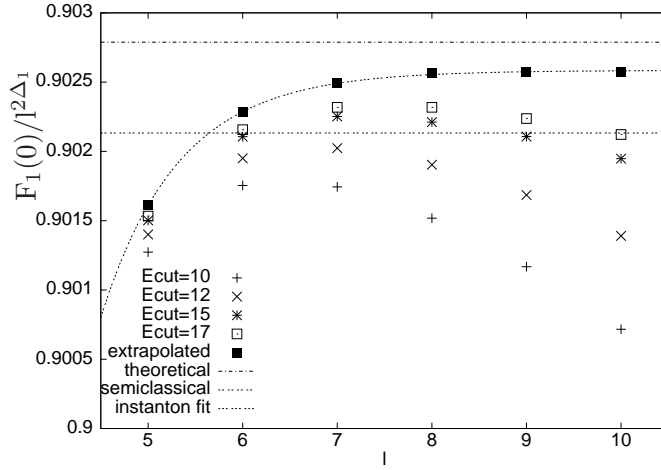
A 7.5 ábrán látható az $m = 1$ eset részletesebb elemzése. Rögzített l -nél a mért adatok az e_{cut} TCSA levágás függvényében monoton növekedőnek bizonyulnak. Ezt a függést a extrapoláló függvénnyel illesztettük meg⁵

$$a(l) \frac{e_{\text{cut}}^{2(2-h)} + c(l)}{e_{\text{cut}}^{2(2-h)} + b(l)}, \quad h = \frac{\beta^2}{4\pi}$$

az extrapolált érték az $a(l)$ együttható. Az l -ben történő extrapoláció (7.39) alapján a

$$A - \frac{B}{l} e^{-l}$$

⁵ A függvény alakját a konform perturbációszámítás e_{cut} -ban mutatott (a perturbáló operátor ultraibolya dimenziójából, valamint a vertexoperátorok operátorszorzat kiválasztási szabályaiból számolt) viselkedése alapján rögzítettük.



7.5. ábra. A TCSA adatok extrapolációjából adódó eredmény az $m = 1$ várható értékre

illesztésével történt, ahol a térfogatfüggést a (7.10) instanton eredmény motiválta, de figyelembe vettük, hogy amennyiben az exponenciális operátort beszűrjük a pályaintegrálba, az eltolás invariancia sérül és így nem marad nullmódus. Ez az alak nagyon jól illeszkedik a levágásban extrapolált adatokra. Az ábrán az egzakt vákuum várható értékre vonatkozó jóslat mellett feltüntettük a Lukyanov és Zamolodchikov által kiszámított szemiklasszikus eredményt is. Mivel $\lambda = 7/2 \gg 1$, a kettő közti különbség elég kicsi, majdnem a TCSA hiba nagyságrendjébe esik, de még így is látható, hogy az extrapolált adatok az egzakt eredményt preferálják.

Megjegyzem, hogy hasonló TCSA számítást végzett Guida és Magnoli [GM97b] a Lukyanov-Zamolodchikov sejtés $\Phi_{(1,3)}$ -perturbált minimálmodellekre megfogalmazott verziójának ellenőrzésére, bár az itt bemutatott extrapolációs technikákat nem alkalmazták: azok saját eredmények, és később a rezonanciák vizsgálatában is hasznosnak bizonyultak.

7.2. A kétfrekvenciás sine-Gordon modell

A kétfrekvenciás sine-Gordon modellt az alábbi hatás definiálja:

$$\mathcal{A}_{\text{DSG}} = \int dt \int dx \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \mu \cos \beta \Phi + \zeta \cos(\alpha \Phi + \delta) \right) \quad \alpha \neq \beta \quad (7.41)$$

ahol Φ valós skalártér, α és β dimenziótlan paraméterek (frekvenciák), δ egy dimenziótlan fázistolás, μ és ζ pedig két dimenziós csatolási állandó. A klasszikus elméletben

$$[\mu] = [\zeta] = (\text{tömeg})^2$$

Amennyiben a (7.41) hatást perturbált konform térelméletként értelmezzük, akkor

$$\begin{aligned} [\mu] &= (\text{tömeg})^{2 - \frac{\beta^2}{4\pi}} \\ [\zeta] &= (\text{tömeg})^{2 - \frac{\alpha^2}{4\pi}} \end{aligned} \quad (7.42)$$

A fenti modell nemintegrálható, ha $\alpha \neq \beta$ és sem μ , sem pedig ζ nem tűnik el; ha a kettő közül az egyik 0, akkor a sine-Gordon modellre redukálódik. Delfino és Mussardo számos érdekes megfigyelést tett a modellel kapcsolatban [DM98], a standard térelméleti módszereket kombinálva perturbált konform térelméleti, valamint form-faktor perturbációszámításon alapuló érvekkel (ld.

7.2.1 alatt). A modellt a $c = 1$ szabad bozon perturbációjaként értelmezve, a két perturbáló tag akkor releváns, ha

$$\beta^2 \leq 8\pi \quad , \quad \alpha^2 \leq 8\pi$$

Ezenkívül megköveteljük, hogy az elmélet a konform perturbációs számításban szigorú értelemben renormálható legyen, azaz ne generálódjanak új potenciálagok. Ezek egyébként a két frekvencia felharmonikusai formájában jelentkeznek, de ekkor az elméletre már inkább mint nem két-hanem többfrekvenciás sine-Gordon modellre érdemes gondolni, klasszikus szinten is⁶. A szigorú renormálhatóság feltétele

$$\alpha\beta \leq 4\pi$$

A racionális esetben

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n} \quad , \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

(itt feltételezem, hogy m és n relatív prím) a potenciál $2\pi r$ szerint periodikus, ahol

$$r = \frac{m}{\alpha} = \frac{n}{\beta}$$

A δ paraméter fizikailag inekvivalens értékei a

$$|\delta| \leq \frac{\pi}{n}$$

tartományba esnek (minden más esetben a mező eltolásával ugyanide képezhetjük vissza). Ez azt mutatja, hogy amennyiben α/β irracionális (azaz $n \rightarrow \infty$), akkor a δ paraméter irreleváns. Ebben az esetben a TCSA módszer nem alkalmazható, mivel bármilyen levágás választása esetén végtelen sok állapottal kell számolnunk (a zárt operátoralgebrát alkotó V_α vertexoperátorok az egész valós α tengelyen sűrűn vannak). Alternatív nemperturbatív megközelítés hiányában a továbbiakban ezzel az esettel nem foglalkozom.

Delfino és Mussardo egyik legérdekesebb eredménye az, hogy átlagtér közelítésben egy másodrendű fázisátalakulást találtak az $\alpha/\beta = 1/2$ és $\delta = \pi/2$ paraméterek mellett. Fabrizio és munkatársai amellet érveltek, hogy ezt a fázisátalakulást a kvantumfluktuációk elsőrendűvé tehetik [FGN00]. Azonban ennek a kérdésnek a vizsgálata az elmélet erős csatolású tartományban történő vizsgálatát követeli meg, amit Bajnok Zoltánnal, Palla Lászlóval és Wágner Ferencsel együtt végeztünk el [BPWT], és a 7.2.3 alatt tárgyalok.

A továbbiakban részletesen csak azzal az esettel foglalkozom, amikor a frekvenciák aránya

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$$

ezt a modellt a rövidség kedvéért DSG₂-vel fogom jelölni.

7.2.1. Form-faktor perturbációs számítás

Tekintsünk most a perturbált konform térelméleti keretben (3.1) egy kettős perturbációt a következő hatással:

$$\mathcal{A}(\mu, \zeta) = \mathcal{A}_{\text{CFT}} - \mu \int dt dx \Phi(t, x) - \zeta \int dt dx \Psi(t, x) \quad (7.43)$$

amire megköveteljük, hogy a $\zeta = 0$ mellett adódó $\mathcal{A}(\mu, \zeta = 0)$ modell integrálható legyen. A két perturbáló mezőről feltesszük, hogy az ultraibolya konform térelmélet zérus spinű releváns skálázó operátorai, azaz $\Delta_\Phi = \bar{\Delta}_\Phi < 1$ and $\Delta_\Psi = \bar{\Delta}_\Psi < 1$.

Tegyük fel továbbá, hogy a $\mathcal{A}(\mu, \zeta = 0)$ modell spektruma tömeges, a tömegskálát (4.7) alapján μ adja meg. A ζ bekapcsolása általában megsérti az integrálhatóságot, megváltoztatja a tömegspektrumot és lehetővé teszi a rugalmatlan folyamatokat, többek között az integrálható esetben stabil részecskék bomlását.

⁶ A háromfrekvenciás esetet Tóth Gábor Zsolt vizsgálta [Tot04].

7.2.1.1. A ζ -ban vezető korrekciók

Delfino, Mussardo és Simonetti javasolta a nemintegrálható modell dinamikájának leírására az ún. form-faktor perturbációs számítás [DMS96]. Jelöljük a $\zeta = 0$ elmélet aszimptotikus állapotait a következőképpen:

$$|A_{i_1}(\theta_1) \dots A_{i_n}(\theta_n)\rangle_{\zeta=0}$$

A form-faktor perturbációs számítás legfontosabb bemeneti adatai a Ψ lokális mező mátrixelemei (form-faktorok):

$$F_{i_1 \dots i_n}^\Psi(\theta_1, \dots, \theta_n) = \langle 0 | \Psi(0, 0) | A_{i_1}(\theta_1) \dots A_{i_n}(\theta_n) \rangle_{\zeta=0}$$

amelyek az integrálhatóságnak köszönhetően egzaktul meghatározhatók az ún. form-faktor axiómák megoldásával (amiről egy kitűnő összefoglalást adott Smirnov [Smi92]). Ezek ismeretében ζ -ban elsőrendig a következő eredmények kaphatók [DMS96, DGM06]:

1. A vákuum energiasűrűség megváltozása:

$$\delta \mathcal{E}_{vac} = \zeta \langle 0 | \Psi | 0 \rangle_{\zeta=0}. \quad (7.44)$$

2. A tömegnégyzet mátrix M_{ab}^2 korrekciója

$$\delta M_{ab}^2 = 2\zeta F_{ab}^\Psi(i\pi, 0) \delta_{m_a, m_b} \quad (7.45)$$

($\bar{}$ az antirészecskét jelöli), feltéve, hogy a kiinduló tömegmátrix $M_{ab}^2 = m_a^2 \delta_{ab}$.

3. Az $A_a + A_b \rightarrow A_c + A_d$ folyamat amplitúdója a következőképpen módosul:

$$\delta S_{ab}^{cd}(\theta, \zeta) = -i\zeta \frac{F_{\bar{c}dab}^\Psi(i\pi, \theta + i\pi, 0, \theta)}{m_a m_b \sinh \theta}, \quad \theta = \theta_a - \theta_b. \quad (7.46)$$

Fontos megjegyezni, hogy a fenti korrekció a tömegközépponti energia (másképpen az s Mandelstam változó) rögzítése mellett adódik. A rapiditás változóban ez a következőnek felel meg:

$$\delta S_{ab}^{cd}(\theta, \zeta) = \frac{\partial S_{ab}^{cd}(\theta, \zeta=0)}{\partial \theta} \delta \theta + \zeta \left. \frac{\partial S_{ab}^{cd}(\theta, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}$$

ahol

$$\delta \theta = - \frac{m_a \delta m_a + m_b \delta m_b + (m_b \delta m_a + m_a \delta m_b) \cosh \theta}{m_a m_b \sinh \theta}$$

a rapiditás változó eltolódása, amit a (7.45) tömegkorrekció indukál, amennyiben s -et fixen tartjuk.

4. Tegyük fel hogy az A_c részecske bomlása az A_a és A_b részecskékbe kinematikailag megengedett: $m_c > m_a + m_b$. Ekkor A_c nyugalmi rendszerében a kimenő részecskék rapiditásait az energia és az impulzus megmaradása egyértelműen meghatározza:

$$\begin{aligned} m_a \sinh \theta_a^{(cab)} + m_b \sinh \theta_b^{(cab)} &= 0 \\ m_a \cosh \theta_a^{(cab)} + m_b \cosh \theta_b^{(cab)} &= m_c \end{aligned} \quad (7.47)$$

és a parciális bomlási állandó:

$$\Gamma_{c \rightarrow ab} = \zeta^2 2^{1-\delta_{ab}} \frac{|F_{cab}^\Psi(i\pi, \theta_a^{(cab)}, \theta_b^{(cab)})|^2}{m_c^2 m_a |\sinh \theta_a^{(cab)}|} \quad (7.48)$$

A fenti formulákban az összes m_a tömeg a $\zeta = 0$ elmélet szerint értendő. A form-faktor perturbációs számításban a magasabb korrekciók számítása jelenleg elméletileg nem megoldott, mivel nem világos a magasabb rendekben fellépő ultraibolya divergenciák eltávolításának módja.

Megjegyzem, hogy a bomlási szélességre kapott formula a hadronok gyenge bomlásának szokásos leírásával teljesen analóg. Az erős kölcsönhatás szerepét itt az integrálható perturbáció játssza, amit nemperturbatíván veszünk figyelembe ($\zeta = 0$) modell, a gyenge kölcsönhatásnak pedig a nemintegrálható perturbáció felel meg.

7.2.1.2. Alkalmazás a kétfrekvenciás sine-Gordon modellre

A munkában a kétfrekvenciás sine-Gordon modellre az alábbi eredményeket kaptuk. Legyen a két frekvencia aránya racionális

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$$

ahol m és n relatív prím. Ekkor a (7.41) modell egy n -hajtogatott $\text{sG}(\beta, n)$ sine-Gordon modellnek (a (7.20) jelölésekkel élve) a $e^{i\delta}V_m + e^{-i\delta}V_{-m}$ operátorral vett perturbációjaként fogható fel. A form-faktor perturbációs számítást alkalmazva a következő eredményekre jutunk⁷:

1. Vákuum energiasűrűség megváltozása:

$$\delta\mathcal{E}_k = -\zeta\mathcal{G}_\alpha(\beta)\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta}k + \delta\right) \quad (7.49)$$

$k = 0, \dots, n-1$ az $\text{sG}(\beta, n)$ különböző vákuumait indexeli.

2. Lélegző tömeg korrekciók az első és a második lélegző állapotokra

$$\delta m_1^{(k)} = \frac{\zeta\mathcal{G}_\alpha(\beta)\mathcal{N}}{M_\beta}\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta}k + \delta\right)\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)}\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda}dt\frac{t}{\sin t}\right\} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} \delta m_2^{(k)} = & \frac{\zeta\mathcal{G}_\alpha(\beta)\mathcal{N}^2}{M_\beta}\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta}k + \delta\right)\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)} \times \\ & \left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\exp\left\{-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda}dt\frac{t}{\sin t}\right\} \end{aligned} \quad (7.51)$$

ahol M_β a szoliton tömege a $\text{sG}(\beta, n)$ modellben,

$$\mathcal{N} = \exp\left\{4\int\frac{dt}{t}\frac{\sinh(t)\sinh(t/\lambda)\sinh((1+\lambda)t/\lambda)}{\sinh^2 2t}\right\} \quad (7.52)$$

$\mathcal{G}_\alpha(\beta)$ pedig a (7.37) vákuum várható érték és

$$\lambda = \frac{8\pi}{\beta^2} - 1$$

Természetesen a két cosinus tag szerepe felcserélhető, és lehetséges a $\mu\cos(\beta\Phi)$ tagot tekinteni a perturbációnak.

A fenti korrekciók nagyon egyszerű módon kiszámíthatóak a klasszikus térelméletben, ahol a vákuum energiasűrűséget a potenciál minimuma, a legkönnyebb részecske tömegét pedig a minimumhely körül végzett kis rezgések frekvenciája adja meg:

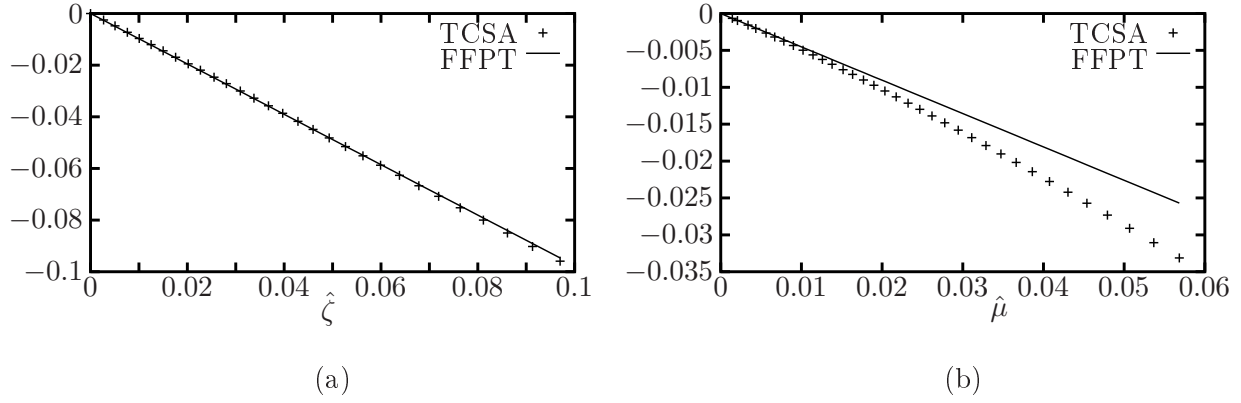
$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_k^{\text{classical}} &= -\zeta\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta}k + \delta\right) + O(\zeta^2) \\ \delta m_1^{\text{classical}} &= -\zeta\frac{\alpha^2}{2\sqrt{\mu}\beta}\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta}k + \delta\right) + O(\zeta^2) \end{aligned} \quad (7.53)$$

A klasszikus eredményeket a form-faktor perturbációs számítás tökéletesen reprodukálja, ha figyelembe vesszük, hogy a $\beta \rightarrow 0$ klasszikus határesetben⁸ (miközben α/β rögzített)

$$\mathcal{G}_\alpha(\beta) \rightarrow 1 \quad , \quad \mathcal{N} \rightarrow 1 \quad , \quad M_\beta \rightarrow \frac{8\sqrt{\mu}}{\beta}$$

⁷ A vertex operátorok form-faktorai megtalálhatók Lukyanov munkájában [Luk97].

⁸ Az, hogy a $\hbar \rightarrow 0$ és a $\beta \rightarrow 0$ határeset ekvivalens, a pályaintegrál formalizmusban egyszerű skálázási eljárással adódik, ezt az érvelést (pontosabban a peremes esetre vonatkozó kiterjesztését) 8.5.3.2 alatt tárgyalom.



7.6. ábra. A (7.49) vákuumenergia korrekciók és a TCSA összehasonlítása

(a) $\Delta\mathcal{E}_0/M_\beta^2$ mint $\hat{\zeta} = \zeta M_\beta^{-x_\beta}$ függvénye (b) $\Delta\mathcal{E}_0/M_\alpha^2$ mint $\hat{\mu} = \mu M_\alpha^{-x_\alpha}$ függvénye

7.2.1.3. Csonkolt konform állapotter közelítés a kétfrekvenciás sine-Gordon modellre

A 4.2.2 alatti tárgyalást követve, a Hamilton operátorra a következő eredmény adódik:

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi | H_{\text{DSG}} | \Psi' \rangle &= \frac{2\pi}{L} \left(\Delta_\Psi^+ + \Delta_\Psi^- - \frac{1}{12} \right) \delta_{\Psi\Psi'} \\
 &+ \frac{2\pi}{L} \left(\frac{\mu L^{2-2\Delta_\beta}}{(2\pi)^{1-2\Delta_\beta}} B(\beta)_{\Psi\Psi'} + \frac{\zeta L^{2-2\Delta_\alpha}}{2(2\pi)^{1-2\Delta_\alpha}} B(\alpha)_{\Psi\Psi'} \right) \\
 B(\omega)_{\Psi\Psi'} &= \langle \Psi | \cos(\omega\Phi(1)) | \Psi' \rangle \quad , \quad \Delta_\omega = \frac{\omega^2}{8\pi}
 \end{aligned} \tag{7.54}$$

ahol $|\Psi\rangle$ és $|\Psi'\rangle$ a konform Hilbert-tér két vektora.

A (7.42) alapján bevezethetjük a következő dimenziótlan paramétert:

$$\eta = \frac{\zeta^{x_\beta}}{\mu^{x_\alpha} + \zeta^{x_\beta}} \tag{7.55}$$

ahol $x_\omega = 2 - \frac{\omega^2}{4\pi}$. A két sine-Gordon határesetre jellemző paraméterek a következőképpen foglalhatók össze:

	potenciál	szoliton tömeg
$\eta = 0$:	$\mu \cos \beta\Phi$	M_β
$\eta = 1$:	$\zeta \cos(\alpha\Phi + \delta)$	M_α

A sine-Gordon csatolások és a szoliton tömegek közti reláció (4.13) alapján egzaktul ismertek:

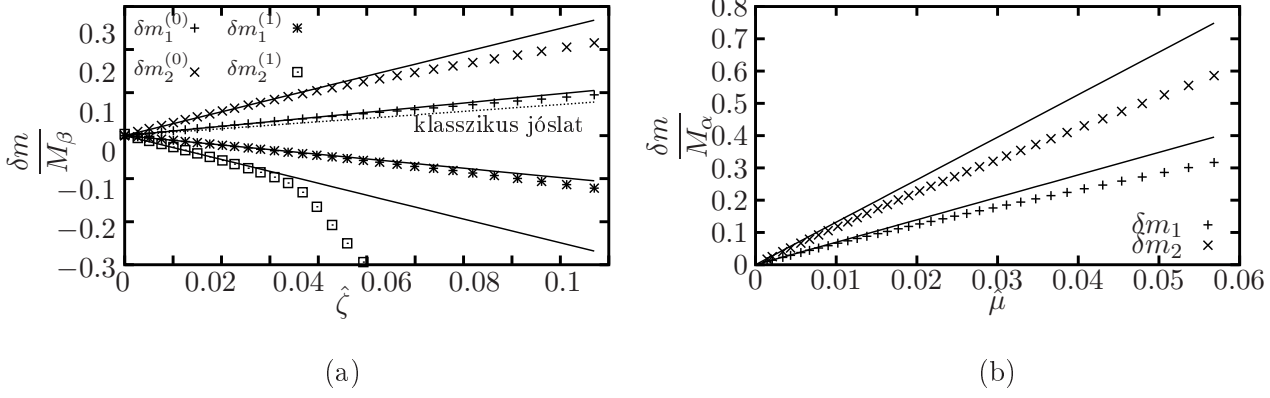
$$\mu = \kappa_\beta M_\beta^{x_\beta} \quad , \quad \zeta = \kappa_\alpha M_\alpha^{x_\alpha} \tag{7.56}$$

Vezessük be az interpoláló tömegskálát a következő módon:

$$M = M_\beta(1 - \eta) + M_\alpha\eta \tag{7.57}$$

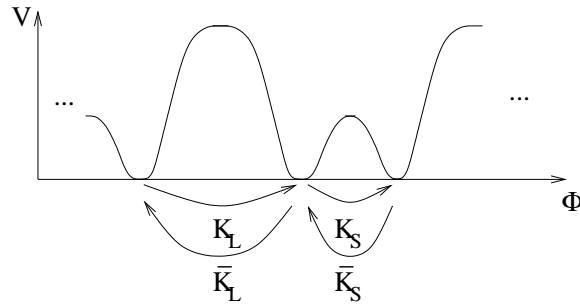
A μ és ζ csatolásokról áttérve az M és η paraméterekre, a dimenziótlan Hamilton operátor a következőképpen definiálható:

$$h_{\text{DSG}} = h_{\text{DSG}}(\eta, l) = M^{-1} H_{\text{DSG}}(\zeta, \mu, L) \tag{7.58}$$



7.7. ábra. A (7.50, 7.51) tömegkorrekciók és a TCSA összehasonlítása

(a) $\delta m / M_\beta$ mint $\hat{\zeta} = \zeta M_\beta^{-x_\beta}$ függvénye (b) $\delta m / M_\alpha$ mint $\hat{\mu} = \mu M_\alpha^{-x_\alpha}$ függvénye

7.8. ábra. A DSG_2 modell vákuumszerkezet és kink gerjesztései, ha $\delta = \frac{\pi}{2}$

ahol $l = ML$.

A (7.49, 7.50, 7.51) eredmények most már összehasonlíthatók a TCSA spektrummal: ezt a 7.6 és 7.7 ábra mutatja a $\beta = 2\alpha = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$, $\delta = 0$ esetben, mégpedig mind a $\mu = 0$, mind pedig a $\zeta = 0$ végpont körüli perturbációs számításban. A ζ szerinti perturbációs számításban egy kétszeresen hajtogatott modellt perturbálunk, így itt minden lélegzőből két példány van, míg a másik esetben a kiinduló modell egyszeresen hajtogatott, így minden lélegzőből csak egy fordul elő.

7.2.2. A kétfrekvenciás sine-Gordon modell tömegspektruma és a szemiklasszikus tömegformula

7.2.2.1. A DSG_2 modell tömegspektrumának problémája

A DSG_2 modellben a ζ -t tekintve perturbációnak, a kiindulópont egy 2-hajtogatott modell. Mivel

$$\delta m_n^{(k)} \propto \cos(k\pi + \delta) \quad , \quad k = 0, 1$$

a form-faktor perturbációs számítás azt jósolja, hogy első rendben

$$\delta m_n^{(0)} = -\delta m_n^{(1)}$$

és

$$\delta m_n^{(k)} = 0 \quad , \quad \text{ha } \delta = \frac{\pi}{2}$$

Mussardo, Riva és Sotkov [MRS04a] a Goldstone-Jackiw-féle szemiklasszikus szoliton form-faktorra [GJ75] alapozva megkísérelték a DSG_2 modell tömegspektrumának szemiklasszikus meghatározását.

A (7.8) ábra szemlélteti, hogy a modellben kétfajta kink gerjesztés van: egy nehezebb (L : long) és egy könnyebb (S : short). A szemiklasszikus form-faktor Goldstone-Jackiw alakja a következőképpen áll elő:

$$\begin{aligned} f_L(\theta'|\theta) &= \langle K_L(\theta')|\Phi(x,t)|K_L(\theta)\rangle = \int dx e^{i(p-p')x} \Phi_{\text{class}}^{(L)}(x) + O(\hbar) \\ f_S(\theta'|\theta) &= \langle K_S(\theta')|\Phi(x,t)|K_S(\theta)\rangle = \int dx e^{i(p-p')x} \Phi_{\text{class}}^{(S)}(x) + O(\hbar) \end{aligned} \quad (7.59)$$

ahol $\Phi_{\text{class}}^{(L/S)}(x)$ a klasszikus (L , illetve S) szoliton megoldás. Kis rapiditásnál

$$f_{L/S}(\theta'|\theta) \approx \int dx e^{iM(\theta-\theta')x} \Phi_{\text{class}}^{(L/S)}(x) \quad (7.60)$$

A keresztezési szimmetriát használva

$$\begin{aligned} F_{L\bar{L}}(\theta - \theta') &= \langle 0|\Phi(x,t)|K_L(\theta)\bar{K}_L(\theta')\rangle = f_L(\theta' + i\pi|\theta) \\ F_{S\bar{S}}(\theta - \theta') &= \langle 0|\Phi(x,t)|K_S(\theta)\bar{K}_S(\theta')\rangle = f_S(\theta' + i\pi|\theta) \end{aligned}$$

(a Lorentz-invariancia következtében F csak a rapiditáskülönbségtől függ). Ha $F_{L\bar{L}}$ -nek pólusa van $\theta - \theta' = i(\pi - u)$ -nál, az egy olyan kötött állapotot jelent, amelynek tömege

$$m = 2M_L \sin \frac{u}{2}$$

(hasnolán $F_{S\bar{S}}$ -re). A (7.60) közelítés miatt ez az eljárás csak az $u \sim 0$ esetre megbízható. A sine-Gordon modellben ez az eljárás β^2 rendig helyesen visszaadta a Dashen, Hasslacher és Neveu [DHN75a] által szemiklasszikus pályaintegrál módszerrel számolt lélegzőtömegeket [MRS04b].

Ezen a sikeren felbuzdulva a módszert alkalmazták a DSG₂ modellre, és $\delta = \frac{\pi}{2}$ esetén eredményül a következőt kapták:

$$m_n^{(L,S)} = m_n \pm 2\pi \frac{\zeta_0 \beta}{\sqrt{\mu_0}} \left(\frac{1}{\beta^2} \sin \left(n \frac{\beta^2}{16} \right) - \frac{n}{16} \cos \left(n \frac{\beta^2}{16} \right) \right) + O(\zeta_0^2) \quad (7.61)$$

A fenti eredmény mögötti megfontolás a következő. A lélegzők a sine-Gordon modellhez hasonlóan a kinkes kötött állapotaiként állnak elő, csak hogy itt most négy lehetőség van: $\bar{K}_L K_L$, $K_L \bar{K}_L$, $\bar{K}_S K_S$ és $K_S \bar{K}_S$. A fenti tömegek az L , illetve az S kinkes szemiklasszikus form-faktoraiban jelentkező pólusoknak felelnek meg [MRS04a]. Ennek alapján az eljárás mindkét vákuum felett (minden n -re) egy könnyebb és egy nehezebb lélegzőt jósol, amelyek a sine-Gordon határesetben degenerálttá válnak. A

$$\chi_0 = \frac{\zeta_0}{M_0^2}$$

dimenziótlan csatolást bevezetve, ahol $M_0 = 8\sqrt{\mu_0}/\beta$ a klasszikus szoliton tömeg (a perturbálatlan sine-Gordon modellben) ez a jósolat a következőképpen írható:

$$\frac{\delta m_n^{(L,S)}}{M_0} = \pm \frac{\pi n^3 \beta^4}{768} \chi_0 + O(\beta^6) \quad (7.62)$$

A kvantumelméletben a dimenziótlan csatolási állandó

$$\chi = \frac{\zeta}{M_\beta^{2 - \frac{\beta^2}{16\pi^2}}}$$

alakban vezethető be. A szemiklasszikus határesetben (kis β) χ χ_0 -tól csak β^2 rendben különbözik, így (7.62) a következő alakba írható:

$$\frac{\delta m_n^{(L,S)}}{M} = \pm \frac{\pi n^3 \beta^4}{768} \chi + O(\beta^6)$$

Az alábbiakban mi csak az első lélegzővel foglalkozunk ($n = 1$), és az általunk használt konkrét csatolásoknál:

$$\begin{aligned} \beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5} & : \frac{\delta m_1^{(L,S)}}{M} = \pm 0.0165367\chi + \dots \\ \beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.2} & : \frac{\delta m_1^{(L,S)}}{M} = \pm 0.0275751\chi + \dots \end{aligned} \quad (7.63)$$

Ez a jóslat láthatóan ellentmond a form-faktor perturbációs számításnak, amely nem jósol ζ -ban lineáris tagot (továbbá szimmetria alapon belátható, hogy minden rendben ζ -ban páros és degenerált tömegeket eredményez). A fenti eredmények alapján Mussardo, Riva és Sotkov kétségbe vonták a form-faktor perturbációs számítás helyességét, és annak megváltoztatását javasolták. Érvelésük lényegét az alábbiakban ismertetem.

Az első probléma abban van, hogy gondolatmenetük a $\zeta \rightarrow 0$ esetben minden vákuum fölött a lélegző állapotok kétszeres degenerációját jóslja. Azonban tudjuk, hogy a sine-Gordon modellben minden egyes B_n csak egyszer fordul elő, mégpedig úgy, hogy váltakozva hol a páratlan, hol a páros szoliton-antiszoliton csatornában jelennek meg, az n paritásának megfelelően. A szerzők ennek áthidalására úgy érvelnek, hogy a $\zeta = 0$ pontban a lélegző nem megfelelő paritású kópiája eltűnik a spektrumból, mivel annak csatolásai a szoliton-antiszoliton állapothoz zérusok:

$$f_{s\bar{s}}^{B_n^+} = 0 \quad \text{ha } n \text{ páros} \quad f_{s\bar{s}}^{B_n^-} = 0 \quad \text{ha } n \text{ páratlan}$$

azaz minden n -re csak egy pólus jelenik meg az $s\bar{s}$ csatornában, mivel a másik pólus reziduuma eltűnik, és ezért a 2×2 -es $s\bar{s}$ szórás mátrix a pólus helyén egydimenziós projektorra redukálódik (ez a (C.11) egzakt sine-Gordon S mátrix könnyen ellenőrizhető tulajdonsága).

Ezután megmutatják, hogy a form-faktor perturbációs számítás a degenerációt (azaz a „rossz” paritású lélegző állapotok létezését) feltételezve módosítható úgy, hogy kvalitatíve a megfelelő eredmény álljon elő, azaz a két lélegző kópia abszolút értékben egyező, de ellentétes előjelű tömegkorrekciót kapjon lineáris rendben, így a kép konzisztens lehet a (7.61) eredménnyel (bár a konkrét számításához olyan mátrixelemek ismerete szükséges, amik jelenleg nem állnak rendelkezésre, így kvantitatíve az összevetést nem tudták megtenni).

A következőkben a TCSA módszert használva megvizsgáljuk, hogy a form-faktor perturbációs számítás eredeti (7.2.1.2 alatti) változata, illetve a szemiklasszikus form-faktor módszer közül melyik támasztható alá a modell dinamikája alapján.

7.2.2.2. TCSA analízis

Hogy perturbatív tartományban maradjunk, χ -re kis értékeket kell választanunk. Mivel a (7.63) mérendő effektus igen kicsi, ezért nagyon nagy pontosságú TCSA számításra van szükség. Ennek érdekében β -ra a fentebb jelzett relatíve kis értékeket választottuk, ahol a TCSA elég gyorsan konvergál, valamint a Hilbert-teret paritás szerint szektorokra bontottuk, így magasabb levágásig el tudtunk menni, mivel egyszerre kevesebb vektort kellett kezelni.

A numerika pontosságát a $\delta = 0$ esettel teszteltük. Ekkor a modellnek van egy

$$\Phi \rightarrow -\Phi \quad (7.64)$$

szimmetriája, aminek segítségével a Hilbert-teret páros és páratlan szektorra vágtuk szét. A $\chi = 0$ eredményeket összevetettük az egzakt S mátrix elmélettel, és 10^{-5} pontosságú egyezést találtunk. A vákuumállapotok a páros, a B_1 egyrészecke állapotok a páratlan szektorban vannak. Mivel a két vákuum (7.49) alapján eltérő vákuum energiasűrűséggel rendelkezik, hasonlóképpen a megfelelő egyrészecke állapotok is, így nagyon könnyű mindkét egyrészecke állapothoz megtalálni a hozzá tartozó vákuumot. $\zeta \rightarrow -\zeta$ alatt a teljes spektrum invariáns, de a két vákuum és a felettük lévő állapotok szerepet cserélnek, így azt várjuk, hogy

$$m_1^{(0,1)}(-\zeta) = m_1^{(1,0)}(\zeta) \quad (7.65)$$

χ	$m_1^{(1)}$ (TCSA)	$m_1^{(2)}$ (TCSA)	$m_1^{(1)}$ (FFPT)	$m_1^{(2)}$ (FFPT)	$m_1^{(1)} - m_1^{(2)}$ (TCSA)	$m_1^{(1)} - m_1^{(2)}$ (FFPT)
0	0.27230	0.27231	0.27233	0.27233	-0.00001	0
0.001	0.27325	0.27136	0.27328	0.27138	0.00019	0.00020
0.002	0.27420	0.27039	0.27424	0.27042	0.00381	0.00380
0.003	0.27514	0.26942	0.27519	0.26947	0.00572	0.00572
0.004	0.27610	0.26847	0.27615	0.26851	0.00763	0.00764
0.005	0.27702	0.26749	0.27710	0.26756	0.00953	0.00954
0.006	0.27796	0.26652	0.27805	0.26661	0.01144	0.01144
0.007	0.27888	0.26553	0.27901	0.26565	0.01335	0.01336
0.008	0.27982	0.26455	0.27996	0.26470	0.01527	0.01526

7.1. táblázat. A TCSA és a form-faktor perturbációs számítás eredményeinek összehasonlítása a $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5}$, $\delta = 0$ esetben.

A

$$\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5} = 1.4179631 \dots$$

csatolási állandót választva, $e_{\text{cut}} = 18$ -nál 9334 páros és 9319 páratlan állapot van a zérus teljes impulzusú és topológiailag semleges szektorban. A (7.50)-nak megfelelően a form-faktor perturbációs számítás jóslata:

$$\frac{\delta m_1^{(1,2)}}{M} = \pm 0.95392713 \dots \times \chi \quad (7.66)$$

A mért tömegeket a 7.1 táblázat tartalmazza, a 7.9 ábrán pedig grafikus formában mutatjuk be ezeket. Látható, hogy nagyobb χ értékekre eltéréseket találunk, ezek a χ -ben magasabb rendű effektusokból származnak. (7.65)-ből világos, hogy a két tömeg különbségéből a ζ^2 korrekció kiesik, így a tömegfelhasadás esetén még jobb egyezést várunk, ami a táblázatból is kiolvasható: a mért felhasadás a jóslattal a csonkolási hibán belül megegyezik (a TCSA spektrum alapján a csonkolási hiba 2×10^{-5} -nek becsülhető). A tömegfelhasadás alapján megillesztve a (7.66) alatti együtthatóra

$$0.95441 \pm 0.00032$$

adódik, ami nagyon jó egyezést mutat. Megjegyzem, hogy ennek az együtthatónak a klasszikus elméleti értéke 1 (ld. (7.53)), tehát a kvantumkorrekciók kb. 5% nagyságrendűek.

A $\delta = \pi/2$ esetben a paritás projekcióhoz a

$$\Phi \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} - \Phi \quad (7.67)$$

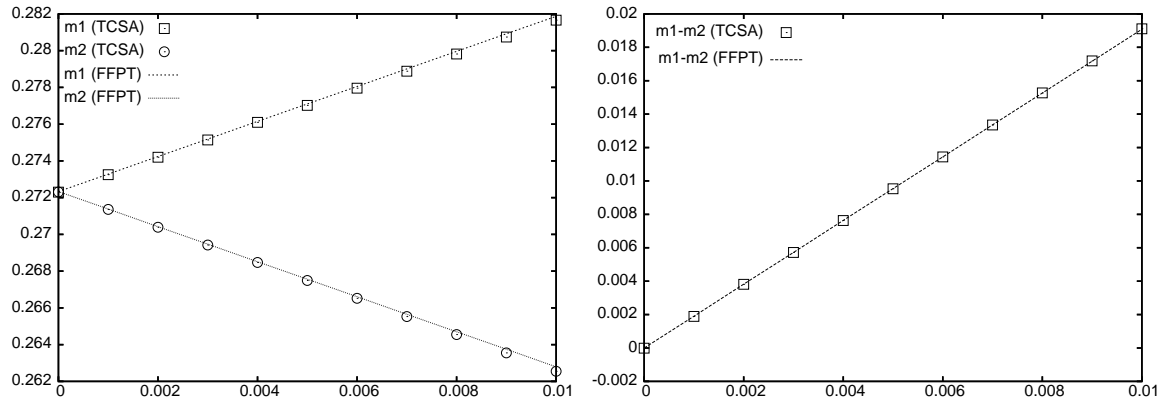
szimmetriát használhatjuk. Az előző β érték esetén kapott m_1^\pm tömegeket a (7.2) táblázatban soroltam fel ($e_{\text{cut}} = 18$, 9334 páros és 9319 páratlan állapot). A mért és a (7.63) alapján jóslott tömegfelhasadást grafikusán a 7.10 ábrán mutatom be.

A tömegek a lebegőpontos aritmetika pontosságán belül a ζ páros függvényeinek bizonyultak. Ez már önmagában kizárja a lineáris korrekciót, de ennél is továbbmehetünk. A tömeg mért ζ függésére a $\chi \in [-0.05 \dots 0.05]$ tartományban a

$$m_1^\pm = m_1 + a_\pm \chi + b_\pm \chi^2 + c_\pm \chi^3 + d_\pm \chi^4$$

függvényt illesztve:

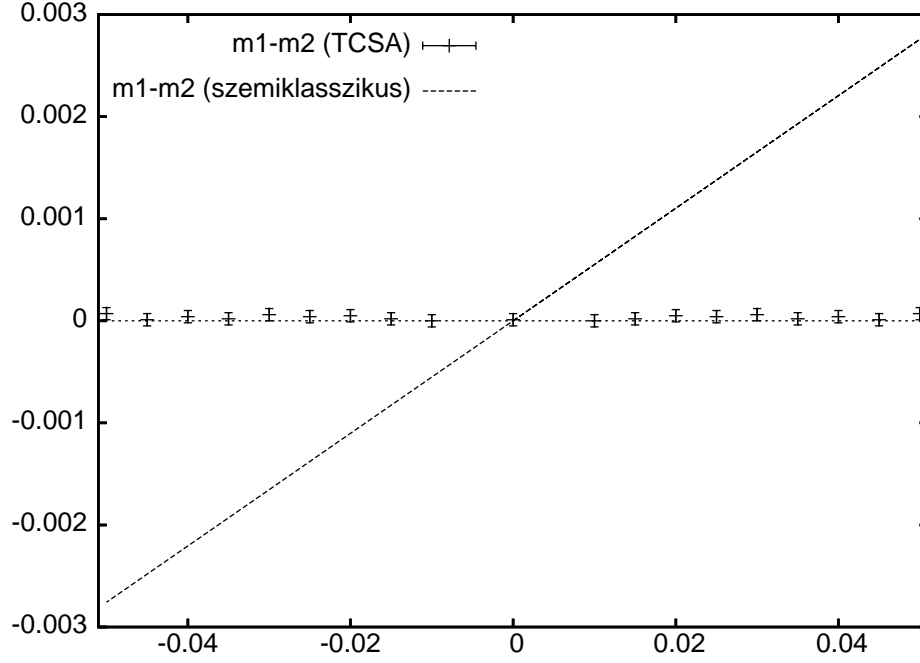
$$\begin{aligned} a_+ &= 0 \pm 0.00010 & a_- &= 0 \pm 0.000054 \\ b_+ &= -7.606 \pm 0.018 & b_- &= -7.625 \pm 0.011 \\ c_+ &= 0 \pm 0.054 & c_- &= 0 \pm 0.033 \\ d_+ &= -152.4 \pm 6.9 & d_- &= -149.5 \pm 4.4 \end{aligned}$$



7.9. ábra. A TCSA eredmények és a form-faktor perturbációs számítás jóslatainak összehasonlítása a $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5}$, $\delta = 0$ esetben. A tömegeket az M_β szoliton tömeg egységeiben mérjük, m_1 és m_2 jelöli $m_1^{(0)}$ -t és $m_1^{(1)}$ -t. A TCSA pontok hibája az ábrázoláshoz túl kicsi.

χ	m_1^+	m_1^-	$m_1^+ - m_1^-$ (TCSA)	$m_1^+ - m_1^-$ (7.63)
0	0.27230	0.27231	-0.00001	0
± 0.010	0.27154	0.27154	0	0.00033
± 0.015	0.27059	0.27057	0.00002	0.00050
± 0.020	0.26925	0.26925	0	0.00066
± 0.025	0.26750	0.26746	-0.00004	0.00083
± 0.030	0.26536	0.26530	0.00006	0.00099
± 0.035	0.26276	0.26274	0.00002	0.00116
± 0.040	0.25975	0.25971	0.00004	0.00132
± 0.045	0.25625	0.25624	0.00001	0.00149
± 0.050	0.25236	0.25229	0.00007	0.00165

7.2. táblázat. Mért tömegek $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$ mellett a szoliton tömeg egységeiben a (7.63) jóslattal összevetve. A TCSA mérés becsült hibája ± 0.00002 .



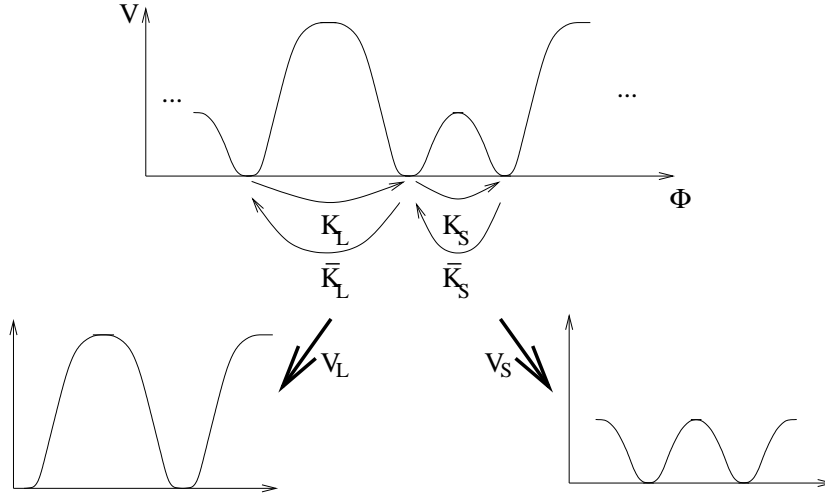
7.10. ábra. A TCSA-ból mért tömegfelhasadás és (7.63) összevetése $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$ esetén

míg (7.63) $a_{\pm} = \pm 0.0165367$ értéket ad, ami két nagyságrenddel nagyobb, mint a fenti illesztés hibája. (Az is jól látszik, hogy a hibán belül $b_+ = b_-$ és $d_+ = d_-$, ami azt mutatja, hogy a két tömeg – a modell \mathbb{Z}_2 szimmetriájából adódó várakozásoknak megfelelően – degenerált). A csatolási állandó ezen értékénél a sine-Gordon modellben 10 lélegző állapot van, ami azt jelzi, hogy a modell a szemiklasszikus tartományba esik, vagyis nem várhatjuk, hogy a kvantumkorrekciók segíthetnének (a fenti becslés alapján mindössze pár százalékosra tehetők). Hasonló következtetéseket vontunk le a $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.2}$ modellben elvégzett vizsgálatok alapján.

7.2.2.3. Elméleti interpretáció

Láttuk, hogy a TCSA adatok nem támasztják alá a Mussardo, Riva és Sotkov által használt szemiklasszikus form-faktor számításon alapuló (7.61) eredményt, ezzel szemben hibahatáron belül megegyeznek a standard form-faktor perturbációs számítás alapján általunk származtatott (7.50) tömegkorrekciókkal. A következőkben megpróbálom ezt az eredményt elméleti alapon jobban megérteni.

1. Az első fontos észrevétel az, hogy a kvantumeffektusok az általunk vizsgált csatolási értékeknél néhány % nagyságrendűek, így teljességgel kizárt, hogy az eltérés oka a (7.61) szemiklasszikus voltában keresendő: ez az eredmény már vezető rendben is hibás kell legyen. Ez nem túl meglepő, ha észrevesszük, hogy a ζ -ban lineáris korrekció együtthatója β^4 rendű. A Goldstone-Jackiw szemiklasszikus szoliton form-faktor egyszerűen nem konzisztens eddig a rendig: a szoliton tömeg, illetve a mátrixelemek kvantumkorrekcióját is figyelembe kell venni, hogy β^4 rendben konzisztens eredményt kaphassunk. β^2 rendig konzisztens, ebben a rendben viszont meg is egyezik a form-faktor perturbációs számítás azon (β -ban egzakt) eredményével, hogy nincs ζ -ban első rendű korrekció.
2. Az extra („rossz paritású”) semleges állapotok kérdése. A sine-Gordon elmélet végesméret spektrumának leírása, amit a 6. fejezetben részletesen taglaltam, a hajtogatott esetre pedig 7.1.3 alatt ismertettem, lehetővé teszi ennek a kérdésnek a vizsgálatát. Arra ugyan nincs matematikai bizonyításunk, hogy a DdV egyenlet az ultraibolyában előállítja a konform tér-elmélet valamennyi operátorának megfelelő állapotot, és hasonlóan nincs belátva, hogy az inf-

7.11. ábra. A V_L és V_S szemiklasszikus effektív potenciálok

rávörösben előállna az aszimptotikus sok-részecske állapotok teljes halmaza. Viszont egyrészt a csonkolt konform állapottér közelítésben, másrészt közvetlenül a DdV formalizmusban meg lehet vizsgálni a legalacsonyabban fekvő állapotokat, és semmi jele nincs annak, hogy a leírás ne lenne teljes, azaz mind az infravörös, mind az ultraibolya határesetben a 2-hajtogatott modell spektrumának 7.1.3 alatt adott leírása alapján várt összes állapot megfelelőjét megtaláljuk. Viszont nem találunk többet: azaz sehol semmi nyoma olyan „rossz paritású” lélegző állapotoknak, amik létezését Mussardo, Riva és Sotkov feltételezték.

3. A szemiklasszikus form-faktor Goldstone-Jackiw alakja csak a klasszikus megoldástól függ, azonban ez azt jelenti, hogy pl. az L kinkre alkalmazva az aszimmetrikus potenciálvölgynek csak a bal, S kinkre csak a jobb oldalát veszi figyelembe. Ez azt jelenti, hogy a 7.2.2.1 alatt vázolt eljárásban valójában nem az eredeti modellnek megfelelő, hanem egy (a kink típusától függően) V_L illetve V_S szimmetrizált potenciálra számolunk (7.11 ábra). Ebből a szempontból nem meglepő a sine-Gordon esetben tapasztalt egyezés, ahol minden vákuum körül szimmetrikus a potenciál, ráadásul eleve csak β^2 rendig számoltak. Ellenben teljesen nyilvánvaló, hogy a DSG_2 esetén ez az eljárás nem helyes, mert nem a modell valóságos dinamikáját veszi figyelembe (túl a β^4 rendig történő számolás nem önkonzisztens voltán).
4. A fentiek miatt minden bizonnyal a Mussardo, Riva és Sotkov által $\delta = 0$ mellett lezármaztatott tömegspektrum is helytelen. Az erre az esetre vonatkozó eredményük:

$$\delta m_n^{(\pm)} = \pm \frac{\beta \zeta_0}{8\sqrt{\mu_0}} \left[\left(1 - \log \frac{\zeta_0}{16\mu_0} \right) \frac{32}{\beta^2} \sin \left(n \frac{\beta^2}{32} \right) + n \log \frac{\zeta_0}{16\mu_0} \cos \left(n \frac{\beta^2}{32} \right) \right] + O(\zeta_0^2)$$

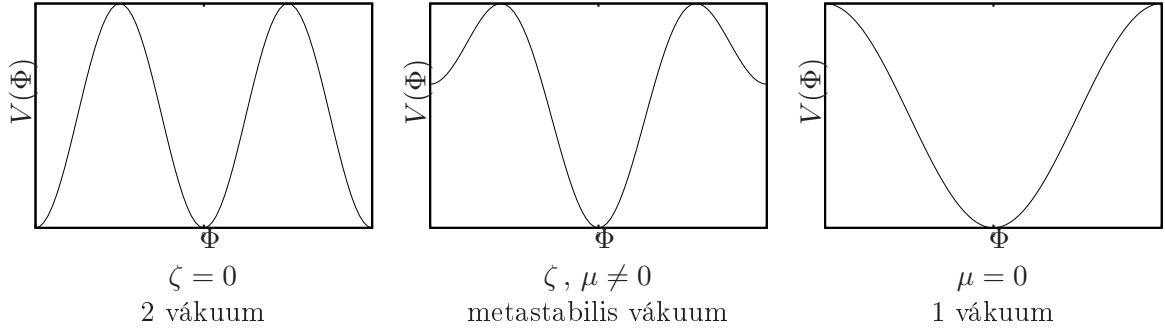
β -ban kifejtve

$$\frac{\delta m_n^{\pm}}{M_0} = \pm \left(n + \beta^4 \frac{n^3}{6144} \left(1 - \log \frac{\zeta_0^2}{256\mu_0^2} \right) + O(\beta^6) \right) \frac{\zeta_0}{M_0^2} + O(\zeta_0^2) \quad (7.68)$$

helyesen reprodukálja a klasszikus határesetet:

$$\frac{\delta m_n^{\pm}}{M_0} = \pm n \frac{\zeta_0}{M_0^2} + O(\zeta_0^2)$$

$\delta = 0$ esetén nagyon nehéz a TCSA-val numerikusan eldönteni a kérdést, mivel ott már eleve van egy (meglehetősen nagy) lineáris tömegkorrekció a (7.50) form-faktor perturbációs számítás alapján is, és nehéz ettől elkülöníteni a β^4 rendű $\zeta \log \zeta$ korrekciót. Viszont az összes fenti elméleti probléma ezzel a számolással kapcsolatban is fennáll.

7.12. ábra. A DSG₂ modell potenciálja $\delta = 0$ esetén

7.2.3. Fázisátalakulás vizsgálata végesméret effektusok segítségével

A DSG₂ modell Lagrange-sűrűsége

$$\mathcal{L}_{\text{DSG}_2} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \mu \cos \beta \Phi + \zeta \cos \left(\frac{\beta}{2} \Phi + \delta \right)$$

$$\Phi \equiv \Phi + \frac{4\pi}{\beta} \quad (7.69)$$

Az $\eta = 0$ ($\zeta = 0$) pontban két vákuum van, amiket vehetünk a $\Phi_0 = 0$ és $\Phi_1 = -2\pi/\beta$ értéknél, ami egy 2-hajtogatott sine-Gordon modellnek ($\text{SG}(\beta, 2)$) felel meg, az $\eta = 1$ ($\mu = 0$) pontban pedig egyetlen vákuum van a $\Phi = -2\delta/\beta$ helyen, ami egy 1-hajtogatott modellt ($\text{SG}(\beta/2, 1)$) jelent.

A $\delta = 0$ esetet $\left(-\frac{2\pi}{\beta} < \Phi \leq \frac{2\pi}{\beta}\right)$ a 7.12 ábra szemlélteti. $0 < \eta < 1$ esetén két vákuum van, eltérő energiasűrűséggel, amelyek egyike metastabilis. A TCsa számítások eredményeit (a vákuum szektorban) a 7.13 ábra mutatja be.

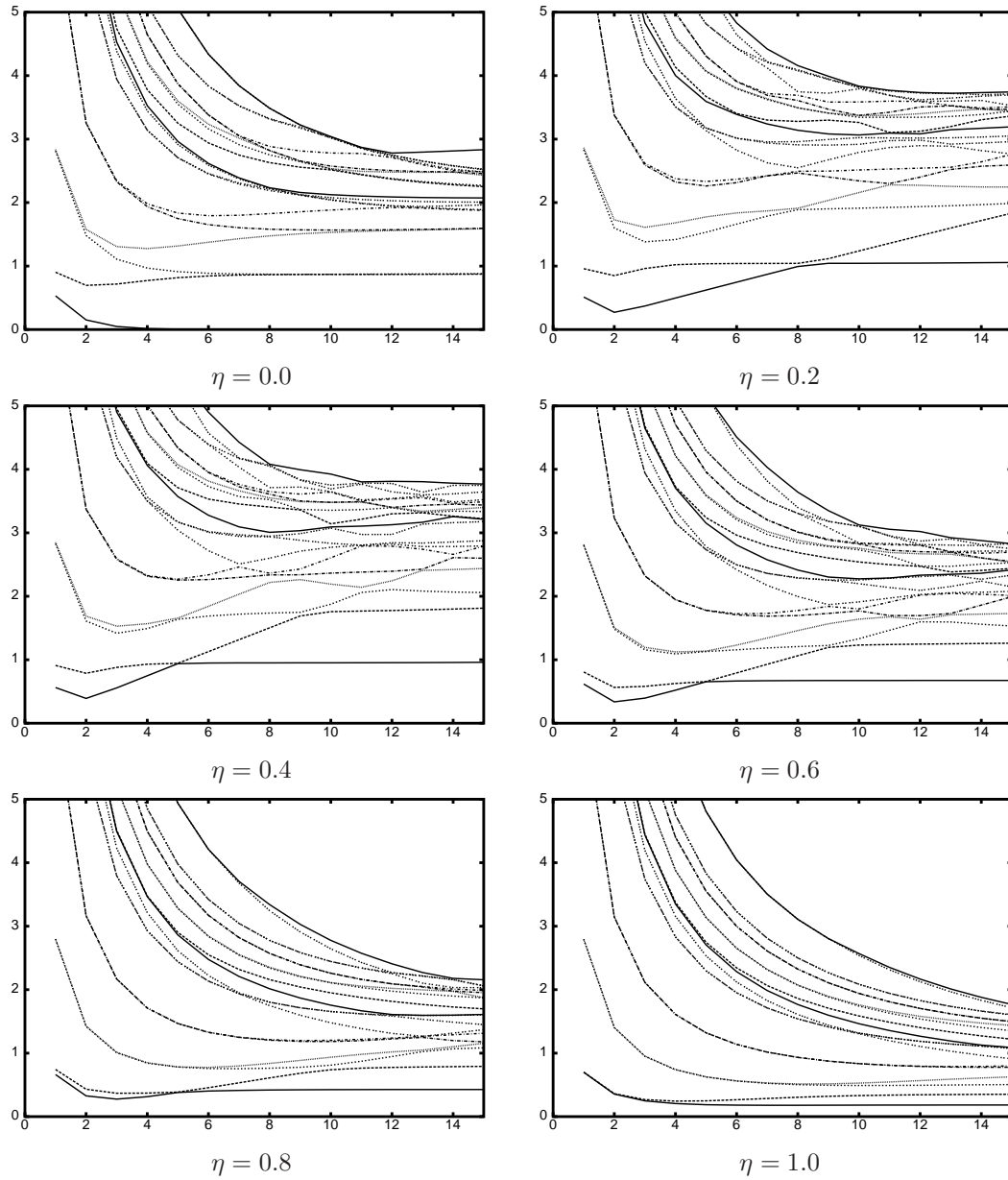
A spektrum legszembeötlőbb jellemzője az „elszálló” állapotok jelenléte. Az energiákat a legalsó szintet (alapállapot értéket) levonva normáltuk. $\eta = 0$ -nál az első gerjesztett állapot és az alapállapot felhasadása a térfogattal exponenciálisan csökken, ezt részletesen tárgyaltuk a 7.1.4 alatt mint a véges térfogatban jelenlévő instantonok okozta alagúteffektus hatását. $\eta \neq 0$ esetén a felhasadásban a domináns járulékok lineáris lesz: ez az eltérő vákuum energiasűrűség következménye. A gerjesztett állapotok ennek megfelelően két osztályba sorolódnak aszerint, hogy melyik vákuum feletti gerjesztésnek felelnek meg, és az „elszálló” állapotok a nagyobb energiasűrűséggel rendelkező vákuum felettieknek felelnek meg. Ezek metastabilisak, amit a tipikus szintelkerülések jeleznek (vö. a rezonanciák részletes tárgyalásával a 7.3 fejezetben). η egyhez tartásával a metastabilis állapotok eltűnnek, a szintek átrendeződnek a határesetben adódó sine-Gordon modell spektrumává.

A $\delta = \pi/2$ esetben a skalár mező potenciálja

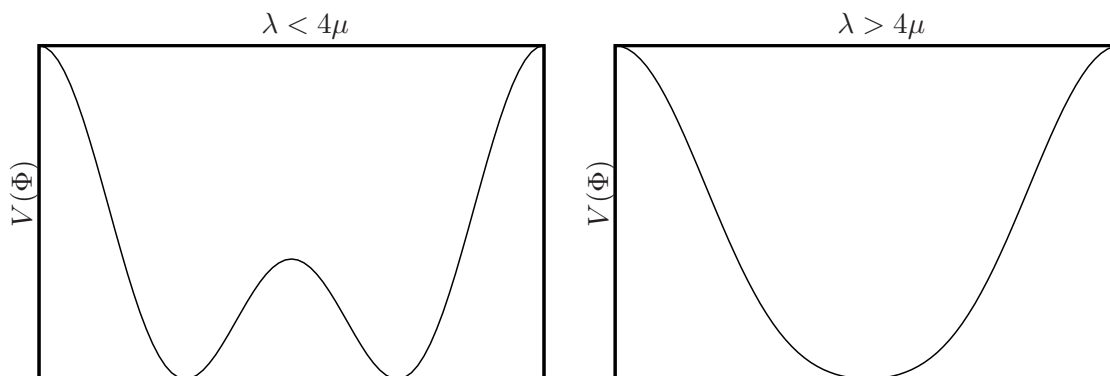
$$V(\Phi) = -\mu \cos \beta \Phi + \zeta \sin \frac{\beta}{2} \Phi \quad (7.70)$$

Ez a potenciál az Ising univerzalitási osztályba eső másodrendű fázisátalakulásra jellemző viselkedést mutat, ld. a 7.14 ábrán.

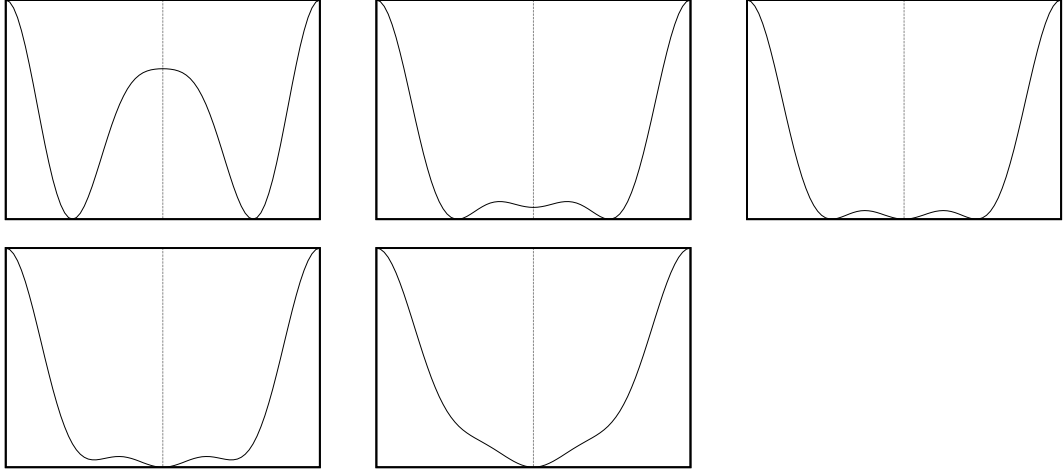
Azonban a klasszikus potenciál vizsgálata csak az átlagtér közelítésnek felel meg. Annak érdekében, hogy eldöntsük, a fázisátalakulás valóban létezik-e, a teljes kvantum effektív potenciálra



7.13. ábra. A DSG₂ TCSA spektruma $\delta = 0$ és $\beta = 4\sqrt{\pi}/3$ mellett ($\eta = 0$: 3 lélegző, $\eta = 1$: 17 lélegző)



7.14. ábra. A DSG₂ modell potenciálja $\delta = \frac{\pi}{2}$ esetén

7.15. ábra. A $\kappa = -\frac{2}{5}\mu$, $\nu = 0$ eset

szükségünk van. A modell a következő diszkrét szimmetriákra nézve invariáns:

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \Phi + \frac{4\pi}{\beta}k, & k \in \mathbb{Z} \\ \Phi &\rightarrow -\frac{2\pi}{\beta} - \Phi, & \mathbb{Z}_2\end{aligned}\quad (7.71)$$

és ezeket felhasználva az effektív potenciál a következő alakba írható:

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = -\mu \cos \beta\Phi + \zeta \sin \frac{\beta}{2}\Phi + \kappa \sin \frac{3\beta}{2}\Phi + \nu \cos 2\beta\Phi + \dots \quad (7.72)$$

ahol ... a feltüntetettekkel analóg magasabb frekvenciás tagokat jelöli, amiket most az egyszerűség kedvéért elhagyok. Ahhoz, hogy a másodrendű fázisátalakulás fennmaradjon, a fázisátalakulási pontban fenn kell álljon:

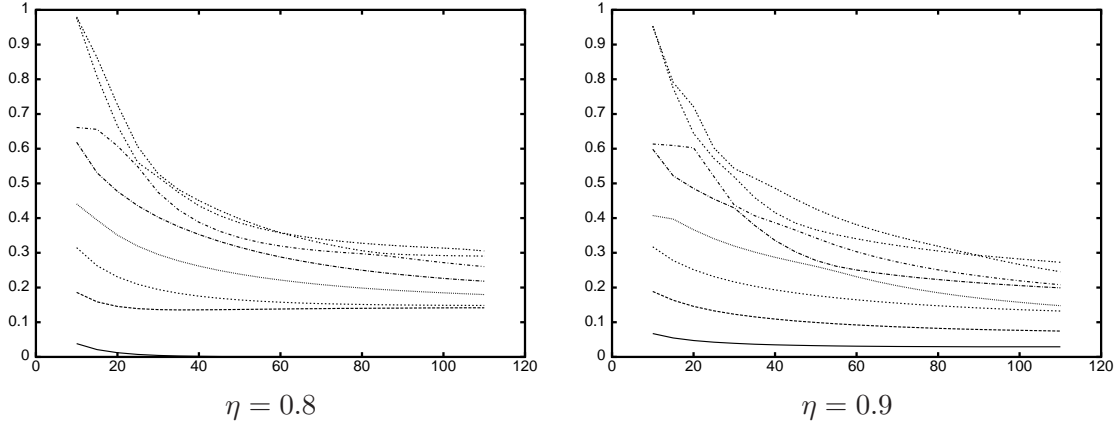
$$V_{\text{eff}}''(\Phi)|_{\Phi=-\frac{\pi}{\beta}} = 0, \quad V_{\text{eff}}^{(4)}(\Phi)|_{\Phi=-\frac{\pi}{\beta}} > 0 \quad (7.73)$$

Ha a μ , ζ , κ és ν paramétereket függetlenként kezeljük, és a fázisátalakulást ζ változtatásával érjük el, akkor ezek a feltételek pontosan azt jelentik, hogy $\mu + 6\kappa + 20\nu > 0$ kell legyen. Vagyis a magasabb frekvenciás korrekciók képesek arra, hogy a fázisátalakulást elsőrendűvé tegyék. Egy példát a 7.15 ábrán mutatok, ahol az látható, hogy csak egy $\sin \frac{3\beta}{2}\Phi$ tag is meg tudja változtatni a fázisátalakulás rendjét⁹.

Ezek alapján felmerül a kérdés, hogy a fázisátmenet első- vagy másodrendű-e. Vegyük észre, hogy a fizikai modellben

1. A magasabb frekvenciás csatolási állandók μ és ζ egyértelmű kifejezései: $\kappa = \kappa(\mu, \zeta)$ és $\nu = \nu(\mu, \zeta)$, amelyeket a (7.70) klasszikus potenciálból kiindulva pl. WKB (azaz β^2 szerinti) kifejtésben lehet számolni.
2. A WKB kifejtésben világos, hogy κ , ν és minden magasabb frekvenciás tag együttthatója eltűnik, ha $\beta \rightarrow 0$, ezért a kis β (szemiklasszikus) tartományban másodrendű átalakulást várunk.
3. A magasabb frekvenciás tagok mind irreleváns operátorokhoz tartoznak, ha $\beta^2 > 32\pi/9$ (az alsó határ $\sin \frac{3\beta}{2}\Phi$ irrelevanciájából adódik) és ezért a $32\pi/9 < \beta^2 < 8\pi$ tartományban is másodrendű átalakulást várunk.

⁹ Fabrizio és munkatársai [FGN00] ebben a kérdésben tévesen azt állították, hogy egy $\sin \frac{3\beta}{2}\Phi$ tag esetén ez nem lehetséges.



7.16. ábra. Fázisátalakulás jele $\beta = 8\sqrt{\pi}/7$ mellett a TCSA spektrumban

A tipikus viselkedést a közbenső tartományban a 7.16 ábra szemlélteti, ahol $\beta = 8\sqrt{\pi}/7$. Látható, hogy a tömegrés $\eta = 0.8$ -nál eltűnik, $\eta = 0.9$ -nél pedig véges. Ez a másodrendű átalakulás tipikus jele: létezik egy $\eta = \eta_{\text{crit}}$ kritikus érték, hogy az \mathcal{M} tömegrés η függvényében a következőképpen viselkedik:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\eta) &= 0 & \eta < \eta_{\text{crit}} \\ \mathcal{M}(\eta) &> 0 & \eta > \eta_{\text{crit}} \end{aligned} \quad (7.74)$$

η -t lassan változtatva pontosan ezt látjuk, vagyis a tömegrés folytonos módon jelenik meg. További jele a másodrendű átalakulásnak az „elszálló” energia szintek hiánya (ami annak felel meg, hogy nincsenek metastabilis állapotok).

A DSG₂ modellben ezt a viselkedést a $0 < \beta^2 < 8\pi/3$ tartományban numerikusan ellenőriztük a TCSA módszerrel (β nagyobb értékeire a TCSA túl lassan konvergál, $\beta^2 > 4\pi$ esetén pedig, mint tudjuk, ultraibolya divergens).

Ellenőrizhető az is, hogy az átalakulás az Ising univerzalitási osztályba esik-e. Az alacsony energiás Hamilton operátornak meg kell őriznie a modell paritás invarianciáját és $\eta = \eta_c$ -nél meg kell egyeznie az Ising modell irreleváns operátorokkal történő perturbációjával (hiszen az energiaszintek növelésével az Ising fixpont vonzó kell legyen). Ez pont a 3.1 alatt említett tömegtelen folyamtnak felel meg. A legalacsonyabb dimenziójú paritásinvariáns irreleváns operátor az Ising modell fixpontját leíró $c = 1/2$ konform minimálmodellben $L_{-1}\bar{L}_{-1}\epsilon$, ahol ϵ az energiasűrűség operátora (a jelölések tekintetében ld. C.1.3). A kritikus viselkedéstől való eltérést egy paritás invariáns releváns operátor írja le, amiből csak egyetlen egy van, mégpedig éppen ϵ , és a kritikus ponthoz közel az együtthatója az $\eta - \eta_{\text{crit}}$ különbséggel arányos kell legyen. Ennek megfelelően az alacsony energiás effektív Hamilton operátor alakja

$$H = H_{\text{Ising}} + \int dx (a \cdot (\eta - \eta_{\text{crit}})\epsilon + bL_{-1}\bar{L}_{-1}\epsilon + \dots) \quad (7.75)$$

és ezzel a konform perturbációszámítás első pár rendjéig számolva, az i -edik gerjesztett állapot energiája a vákuumhoz normálva nagy térfogatban a következőképpen kell viselkedjen:

$$\begin{aligned} E_i(L) - E_0(L) &= \frac{2\pi D_i}{L} + B_i + C_i L + \frac{A_i}{L^2} + \dots \\ B_i &\propto a \quad , \quad C_i \propto a^2 \quad , \quad A_i \propto b \end{aligned} \quad (7.76)$$

ahol $D_i = \Delta_{IR}^+ + \Delta_{IR}^-$ az adott állapothoz az infravörös fixpontban tartozó mező skáladimenziója.

A 7.3 táblázat a (7.76) jóslat TCSA spektrumra való illesztésének eredményeit mutatja, β három különböző értéke mellett.

$\frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}$	η_{crit}	Állapot	D_i	A_i	B_i	C_i
4/7	0.866	1	0.125	-1.2	-0.003	2×10^{-5}
4/7	0.866	2	1.04	-128	0.001	9×10^{-6}
2/3	0.850	1	0.131	-1.35	-0.006	3×10^{-5}
2/3	0.850	2	1.03	-74	0.005	1×10^{-5}
4/5	0.838	1	0.145	-0.89	-0.015	2×10^{-4}
4/5	0.838	2	1.09	-40	-0.001	1×10^{-4}

7.3. táblázat. Numerikus eredmények az első két gerjesztett állapotra β különböző értékeinél. (Az adatokat az M interpoláló tömegskála által adott egységekben kell érteni).

Az adatok a következőképpen értelmezhetők. B és C értéke azt jellemzi, milyen közel sikerült jutni a kritikus viselkedéshez. Mivel a TCSA egy véges dinamikus rendszeren alapul, és csak végtelen szabadsági fokú rendszer lehet kritikus, ezért nem várhatjuk, hogy pontosan kritikus viselkedést találjunk. A táblázatban feltüntetett értékek B_i értékek pontosan a csonkolási hibák¹⁰ nagyságrendjébe esnek, amelyek az illesztésnél használt térfogati tartományban $10^{-3} - 10^{-2}$ közöttinek becsülhetők, és β növelésével nőnek. Ennek alapján a fázisátalakulás (a TCSA pontosságán belül) másodrendű. Természetesen a numerikus adatok nem zárják ki, hogy nagyon gyenge elsőrendű átalakulás legyen, de ez a (7.73)-hoz hasonló egyenlőtlenségek nagyon finoman hangolt kis sértését jelentené, mégpedig β eléggé különböző értékeinél, ami nagyon valószínűtlen.

Ha a fixpont az Ising univerzalitási osztálynak felel meg, akkor az első két gerjesztett állapot a σ spin és az ϵ energiasűrűség operátornak kell megfeleljen, amelyek konform dimenziója:

$$\begin{aligned}\sigma &: \Delta^+ + \Delta^- = \frac{1}{8} = 0.125 \\ \epsilon &: \Delta^+ + \Delta^- = 1\end{aligned}$$

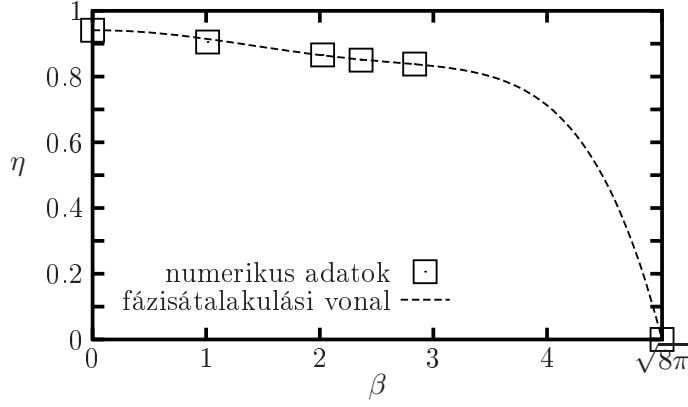
és D_i mért értékei ezzel az elvárható pontosságon belül meg is egyeznek. Vigyázni kell arra, hogy a D_i -vel arányos tag (7.76)-ban alacsonyabb rendű a térfogat függvényében, ami az illesztés pontosságát rontja. Azt is ki lehet deríteni a TCSA állapotok hullámfüggvényeinek ultraibolya határesetét tanulmányozva, hogy az első gerjesztett állapot a $\cos \frac{\beta}{2}\Phi$, a második a $\sin \frac{\beta}{2}\Phi$ operátornak felel meg, amelyek a (7.71)-ben adott \mathbb{Z}_2 szimmetria alatt páratlan, illetve páros operátorok. Ez teljes összhangban van azzal, hogy σ páratlan, míg ϵ páros operátor az Ising modellben. Ráadásul mind a $\sin \frac{\beta}{2}\Phi$ a DSG₂ modellben, mint pedig ϵ az Ising modellben a „hőmérséklet” paraméterhez rendelhető (azaz ezzel lehet a rendszer tömegrését kontrollálni), és a fenti azonosítás megegyezik egy Fabrizio és munkatársai által megfogalmazott sejtéssel [FGN00].

A DSG₂ modell fázisdiagramját a 7.17 ábra mutatja. Először is, $\beta \rightarrow 0$ esetén a klasszikus potenciált használva adódik

$$\eta_{\text{crit}}(\beta = 0) = \frac{16}{17}$$

Mivel $\cos \beta\Phi$ irreleváns, ha $\beta = \sqrt{8\pi}$, ezért a másik végpontban $\eta_{\text{crit}}(\beta = \sqrt{8\pi}) = 0$, hiszen az elmélet a paraméterek teljes tartományában a \mathbb{Z}_2 szimmetriát sértő fázisban van. A végpontok mellett felhasználtuk a 7.3 adatait, és erre az öt pontra megillesztettük a $\eta_{\text{crit}}(\beta)$ függvényt mint β páros polinomját (tudjuk, hogy páros, mivel β előjelváltása kompenzálható Φ átdefinálásával). Ezen felül feltüntettünk még egy másik pontot is $\beta = 4\sqrt{\pi}/7$ csatolásnál, ahol a TCSA-ból meghatározott η_{crit} érték 0.916 ± 0.002 volt, az illesztett görbe pedig az $\eta_{\text{crit}}(\beta = 4\sqrt{\pi}/7) = 0.915$ értéket adja.

¹⁰ A csonkolási hibákat az $\eta = 0$ és $\eta = 1$ pontban egzaktul ismert spektrummal történt összehasonlítás alapján becsültük.

7.17. ábra. A DSG₂ fázisdiagramja

Összegzőképpen megállapíthatjuk, hogy vizsgálataink alapján a másodrendű fázisátalakulás β teljes tartományában fennmarad, és az elmélet fázisátalakulási vonalát (kb. 10^{-3} pontossággal) a 7.17 ábrán bemutatott görbe adja.

7.3. Rezonanciák jellemzése végesméret effektusok segítségével

7.3.1. A form-faktor perturbációszámítás jóslata a bomlási állandóra

7.3.1.1. Ising modell

A kétdimenziós Ising modellt a fixponthoz közeli skálázó tartományban az

$$\mathcal{A}_{\text{Ising}}(h, \tau) = \mathcal{A}_{c=\frac{1}{2}} - h \int dt dx \sigma(t, x) - \tau \int dt dx \epsilon(t, x) \quad (7.77)$$

hatással megadható kvantumtérelmélet írja le, ahol $\mathcal{A}_{c=\frac{1}{2}}$ a $c = 1/2$ konform térelmélet (szabad zérus tömegű Majorana fermion) hatása, ϵ az energiasűrűség operátor ($\Delta_\epsilon = \bar{\Delta}_\epsilon = 1/2$ súlyú primér tér) σ pedig a mágnesezettség operátora (spin operátor, $\Delta_\sigma = \bar{\Delta}_\sigma = 1/16$ súlyú primér tér). h a külső mágneses térnek felel meg, τ pedig a hőmérséklet kritikus értéktől vett eltérését paraméterezi. Az alábbiakban a τ csatolást fogjuk az integrálható modelltől való eltérés mértékének tekinteni. $\tau = 0$ esetén a modellt a C.1.3 alatt összefoglalt E_8 szóráselmélet írja le. A (7.77) modellnek egyetlen dimenziótlan paramétere van, amit a

$$t = \frac{\tau}{|h|^{8/15}} \quad (7.78)$$

alakban vesszünk fel. Az ϵ operátor form-faktorait Delfino és Simonetti [DS96], illetve Delfino, Grinza és Mussardo [DGM06] határozta meg. Ezek segítségével a (7.45) tömegkorrekciók [DGM06]:

$$\begin{aligned} \delta m_a^2 &= 2\tau f_{aa} \\ \Gamma_{c \rightarrow a+b} &= \tau^2 2^{1-\delta_{ab}} \frac{f_{cab}^2}{m_c^2 m_a \sinh \theta_a^{(cab)}} \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} f_{11} &= (-17.8933 \dots) \langle \epsilon \rangle \\ f_{22} &= (-24.9467 \dots) \langle \epsilon \rangle \\ f_{33} &= (-53.6799 \dots) \langle \epsilon \rangle \\ f_{44} &= (-49.3206 \dots) \langle \epsilon \rangle \end{aligned}$$

és ϵ egzakt vákuum várható értéke $\tau = 0$ mellett [FLZZ98]:

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon_h |h|^{8/15} \quad , \quad \epsilon_h = 2.00314 \dots$$

Az $A_c \rightarrow A_1 + A_1$, $c = 4, 5$ folyamatok parciális szélessége pedig dimenziótlán egységekben [DGM06]:

$$\frac{\Gamma_{c \rightarrow 11}}{m_1} = t^2 \frac{(\epsilon_h \kappa^{16/15} f'_{c11})^2}{\left(\frac{m_c}{m_1}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{m_c}{2m_1}\right)^2 - 1}} \quad , \quad c = 4, 5 \quad (7.79)$$

ahol

$$\begin{aligned} f'_{411} &= 36.73044 \dots \\ f'_{511} &= 19.16275 \dots \end{aligned} \quad (7.80)$$

7.3.1.2. DSG₂ modell

A (7.69) alatti kétfrekvenciás sine-Gordon modell esetén a dimenziótlán paramétert

$$t = \frac{\zeta}{M_\beta^{\frac{4\lambda+3}{2\lambda+2}}} \quad (7.81)$$

adja, ahol M_β a szoliton tömeg a $\zeta = 0$ pontban. A lélegzők (C.12) alatti spektrumát használva adódik:

$$\frac{m_3}{m_1} = 1 + 2 \cos \frac{\pi}{\lambda} > 2 \quad \text{ha} \quad \lambda > 3$$

vagyis amennyiben B_3 létezik, a két B_1 -be való bomlása kinematikailag lehetséges (ugyanaz áll az összes B_n -re is). Mivel azonban

$$\frac{m_2}{m_1} = 2 \cos \frac{\pi}{2\lambda} < 2$$

ezért B_2 mindig stabil. A $B_3 \rightarrow B_1 + B_1$ bomlásra a kimenő B_1 részecskék rapiditása (nyugvó B_3 esetén) $\pm\theta_c$, ahol (7.47) alapján

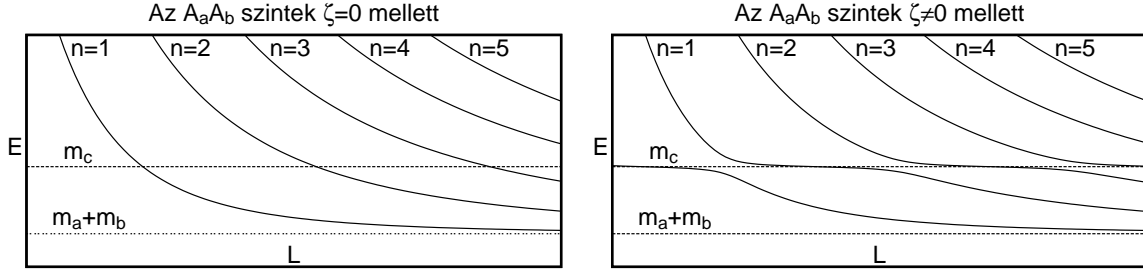
$$2 \cosh(\theta_c) = \frac{m_3}{m_1} = \frac{\sin \frac{3\pi}{2\lambda}}{\sin \frac{\pi}{2\lambda}}$$

szélességét Pozsgay Balázssal együttműködésben számítottuk ki [PT06], a DSG₂ modellben $\delta = -s\frac{\pi}{2}$ -t véve:

$$\frac{\Gamma_{3 \rightarrow 11}}{M} = t^2 \frac{s_{311}^2}{\left(\frac{m_3}{M}\right)^2 \frac{m_1}{M} \sqrt{\left(\frac{m_3}{2m_1}\right)^2 - 1}} \quad (7.82)$$

ahol

$$s_{311}(\lambda) = \tilde{\mathcal{G}}(\lambda) \bar{\zeta}(\lambda)^5 2 \tan \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\tan \frac{3\pi}{2\lambda}}{\tan \frac{\pi}{2\lambda}}} \mathcal{Q}_{11111}(\lambda) \mathcal{R}_{311}(\lambda) \quad (7.83)$$



7.18. ábra. A szintek viselkedése az integrálható esetben ($\zeta = 0$) illetve rezonancia jelenlétében ($\zeta \neq 0$).

és

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}}(\lambda) &= \left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2\lambda}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2\lambda}\right)} \right]^{\frac{1}{2+2\lambda}} \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \left[\frac{\sinh\left(\frac{t}{1+\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda t}{1+\lambda}\right) \sinh t} - \frac{1}{1+\lambda} e^{-2t} \right] \right\} \\ \mathcal{Q}_{11111}(\lambda) &= \frac{(1 + 2 \cos \frac{\pi}{\lambda})(1 + 2 \cos \frac{\pi}{\lambda} + 2 \cos 2\frac{\pi}{\lambda})}{64 \cos \frac{\pi}{\lambda} \cos^5 \frac{\pi}{2\lambda}} \\ \mathcal{R}_{311}(\lambda) &= \left| R\left(i\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 R\left(2i\frac{\pi}{\lambda}\right) R(-2\vartheta_c) \times \right. \\ &\quad R\left(\vartheta_c - i\pi\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) R(\vartheta_c - i\pi) R\left(\vartheta_c - i\pi\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) \times \\ &\quad \left. R\left(-\vartheta_c - i\pi\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) R(-\vartheta_c - i\pi) R\left(-\vartheta_c - i\pi\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) \right| \\ R(\vartheta) &= \mathcal{N} \exp \left\{ 8 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\sinh t \sinh \frac{t}{\lambda} \sinh \frac{(1+\lambda)t}{\lambda}}{\sinh^2 2t} \sinh^2 t \left(1 - \frac{i\vartheta}{\pi}\right) \right\} \\ \mathcal{N} &= \exp \left\{ 4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\sinh t \sinh \frac{t}{\lambda} \sinh \frac{(1+\lambda)t}{\lambda}}{\sinh^2 2t} \right\}\end{aligned}$$

Mivel a B_3 a legalacsonyabb tömegű instabil állapot, a csonkolási hibák minimalizálása céljából érdemes erre koncentrálni. Továbbá a $\delta = -\pi/2$ pontban van egy \mathbb{Z}_2 szimmetria, amit a 7.2.2.2 alatt leírtakat követve fel lehet használni a TCSA pontosságának növelésére.

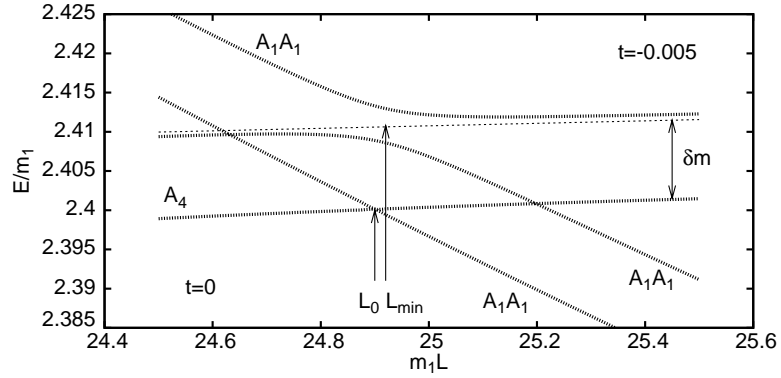
7.3.2. Rezonanciák jelei véges térfogatban

Itt Lüscher eredeti ötletét [Lus91a] továbbfejlesztve bemutatok egy önkonzisztens és hatékony keretet a rezonanciák véges térfogatbeli analizésére.

Tegyük fel, hogy ismerjük a vizsgált kvantumtérelmélet véges térfogatbeli spektrumát, azaz adottak az $E_i(L)$ energiaszintek, amelyek az i -edik gerjesztett állapot alapállapothoz viszonyított energiáját adják meg véges L térfogatban. Legyen a vizsgált bomlási folyamat $A_c \rightarrow A_a + A_b$ ($m_c > m_a + m_b$) és tegyük fel még, hogy van egy olyan ζ paraméterünk, amelynek $\zeta = 0$ értékére az A_c részecske stabil.

Ekkor a $\zeta = 0$ spektrumot a 7.18 (a) ábrával illusztrálhatjuk. Az ábrán, ahogy a továbbiakban is, minden a térfogattal exponenciálisan lecsengő végesmért korrekciót elhanyagoltam – ezeket reziduális („maradék”) végesmért korrekciónak fogom hívni. A kétrészecske szinteket (2.3) alapján az

$$\begin{aligned}m_a L \sinh \theta_a + \delta_{ab} (\theta_a - \theta_b) &= 2n_a \pi \\ m_b L \sinh \theta_b + \delta_{ab} (\theta_b - \theta_a) &= 2n_b \pi\end{aligned}\tag{7.84}$$



7.19. ábra. A szintek viselkedése $\zeta = 0$ illetve $\zeta \neq 0$ esetén, az Ising modell numerikus adataival illusztrálva (m_1 a legkönnyebb részecske tömege $\zeta = 0$ -nál).

és

$$E_{ab}(L) = m_a \cosh \theta_a + m_b \cosh \theta_b$$

összefüggések írják le, ahol $\delta_{ab}(\theta)$ a rugalmas szórás fázistolása, ami a kétrészecske amplitúdóval a következőképpen függ össze:

$$S_{ab}(\theta) = e^{i\delta_{ab}(\theta)}$$

és $n = n_a = -n_b$, mivel a zérus teljes impulzusú szektort vesszük. A kétrészecske energiaszint tehát $1/L^2$ szerint tart az $m_a + m_b$ aszimptotikus értékhez, az egyrészecske állapot (2.1) végesméret korrekciója ellenben exponenciálisan tűnik el, következésképpen van egy olyan L_0 térfogat érték, ahol a két szint metszi egymást:

$$E_{ab}(L_0) = E_c(L_0) = E_0$$

Ha $\zeta \neq 0$, de kicsinek tekinthető, akkor $L \sim L_0$ és $\zeta \sim 0$ mellett a degenerált perturbációs számítás előírása alapján az energiaszinteket egy 2×2 -es effektív Hamilton operátor adja meg:

$$H = E_0 + (L - L_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & \alpha_2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} A(L) & B(L) \\ B(L) & C(L) \end{pmatrix} \quad (7.85)$$

ahol a két állapot relatív fázisának megválasztásával elérhető, hogy B valós és nemnegatív legyen a (A, C) valós, mivel $H^\dagger = H$. Az A, B és C együtthatók L -függését a továbbiakban elhanyagoljuk és L_0 -ban felvett értékeikkel helyettesítjük őket (lentebb látjuk majd, hogy ez konzisztens eljárás). Ennek megfelelően a két szint felhasadása

$$\delta E(L) = \sqrt{[(\alpha_1 - \alpha_2)(L - L_0) + \zeta(A - C)]^2 + 4B^2\zeta^2}$$

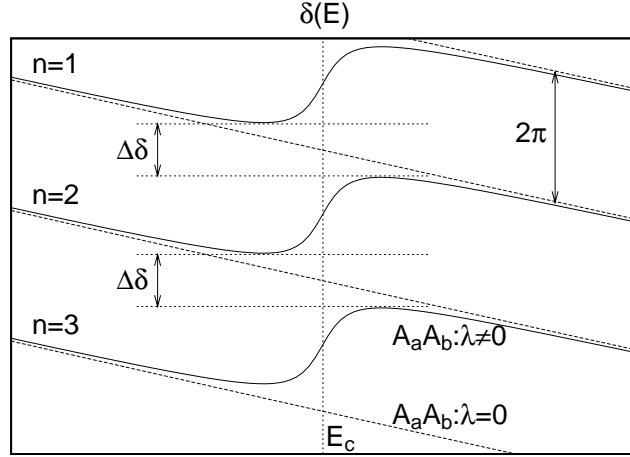
A minimális felhasadáshoz tartozó L_{\min} térfogat:

$$L_{\min} - L_0 = -\zeta \frac{A - C}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (7.86)$$

vagyis a minket érdeklő tartományban $L - L_0$ értéke ζ -ban elsőrendű, ezért az együtthatók L -függésének elhanyagolása konzisztens. A minimális felhasadás értéke:

$$\delta E(L_{\min}) = 2|B\zeta| \quad (7.87)$$

A szintek viselkedését 7.19 illusztrálja: jól látható, ahogy a szintmetszés elkerüléssé változik. A globális képet a 7.18 (a) ábra mutatja. $\zeta \neq 0$ mellett nincs olyan szint, amit A_c egyrészecske



7.20. ábra. A 7.18 ábrán bemutatott kétrészecske nivókból számított $\delta_n(E)$ fázistolás függvények az E_c rezonancia energia környezetében

állapotaként értelmezhetnénk: aszimptotikusan mindegyik állapotot $A_a A_b$ kétrészecske állapotként azonosíthatjuk. A fenti mechanizmus folytán ezen szintek kiterjedt platókból álló mintázatot fognak mutatni, ez pedig annak felel meg, hogy a fázistolásban megjelenik egy Breit-Wigner rezonancia:

$$\delta_{ab}(E) = \delta_0(E) - i \log \frac{E - E_c - i\Gamma/2}{E - E_c + i\Gamma/2} \quad (7.88)$$

ahol a fázistolást most az $E = E_a + E_b$ tömegközépponti energia függvényeként írtam fel, és δ_0 az ún. háttér fázistolás, E_c a rezonancia csúcsának megfelelő energia és Γ a szélesség. Ha (amint az az általunk vizsgált esetekben mindig teljesül)

$$\beta = \left. \frac{d\delta_0}{dE} \right|_{E=E_c} < 0$$

akkor a fázistolásnak két extrémuma van, ld. a 7.20 ábrán. A (7.84) leírást használva a szintek ismeretében a fázistolás meghatározható: először meg kell oldani a

$$E = \sqrt{p^2 + m_a^2} + \sqrt{p^2 + m_b^2} \rightarrow p(E)$$

egyenletet, és ebből

$$\begin{aligned} \delta_1(E) &= -L_1(E)p(E) \\ \delta_2(E) &= -L_2(E)p(E) \end{aligned} \quad (7.89)$$

ahol $L_{1,2}(E)$ az $E_{1,2}(L)$ függvények inverze. A $\delta_{1,2}(E)$ függvényekre

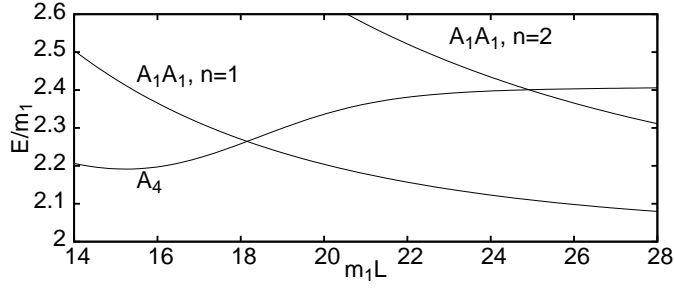
$$\begin{aligned} \delta_1(E) &= \delta_{ab}(E) - 2n_1\pi \\ \delta_2(E) &= \delta_{ab}(E) - 2n_2\pi \end{aligned}$$

és viselkedésüket a 7.20 ábra illusztrálja. Keskeny rezonanciára Γ -ban elsőrendig számolva a következő összefüggés adódik:

$$\Delta\delta = \min \delta_1(E) - \max \delta_2(E) = 4\sqrt{-\beta\Gamma} \quad (7.90)$$

amit felhasználhatunk a bomlási szélesség meghatározására.

Lüscher eredetileg azt javasolta, hogy a Γ szélesség a platók közepén számítható meredekségből határozható meg. Egyszerű számolással meggyőződhetünk róla, hogy ez a meredekség Γ -val



7.21. ábra. A reziduális végesméret effektusok bemutatása az Ising modell példáján, az A_4 és az A_1A_1 állapotokat ábrázolva. A kétrészecske állapotok nagyon pontosan követik a (7.84) által megadott viselkedést, de az A_4 egyrészecske állapot viselkedése teljes egészében a reziduális végesméret effektusok következménye. A diagram a $t = 0$ esetben készült, amikor is a szintek metszik egymást, de kis t -re a spektrum (a szint elkerüléseket leszámítva) gyakorlatilag teljesen azonos a fentivel.

(azaz ζ^2 -tel) arányos. Keskeny rezonancia esetén (7.90) ennél sokkal érzékenyebb módszert ad, hiszen a mérendő mennyiség elsőrendű ζ -ban. A 7.18 (b) ábrára pillantva is teljesen világos, hogy a felhasadást sokkal jobban észre lehet venni (és mérni), mint a platók hajlásszögét. Ráadásul a felhasadás mérése L_{\min} kis környezetének analízisével elvégezhető, amivel a 7.21 ábrán illusztrált reziduális végesméret effektusok sokkal jobban kézben tarthatók (erről később még részletesebben lesz szó).

Egy másik lehetséges módszer a numerikusan meghatározott $\delta(E)$ fázistolás Breit-Wigner görbével történő illesztése. Ehhez azonban az L térfogat egy meglehetősen nagy tartományából kell a spektrumot felhasználni (hiszen egy teljes platót tartalmaznia kell), és nagy tartományban a reziduális végesméret effektusok jelentősen változnak, ezért a $\delta(E)$ nem fogja követni a Breit-Wigner alakot. A problémát a 7.21 ábra illusztrálja, ahol ráadásul Lüscher plató-merevedésként is csődöt mond, mert a „plató” pont az ellenkező irányban hajlik, mint az várható lenne (7.84) és (7.88) alapján.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért felteszem, hogy $m_a = m_b = m_1$ (ahol m_1 a legkönnyebb részecske tömege). Az (7.85) effektív Hamilton operátorból és a (7.88) Breit-Wigner fázistolásból (7.84) alapján az energiaszintekre adódó eredményeket Γ -ban vezető rendig összehasonlítva, a következő összefüggéseket kapjuk [PT06]:

$$\begin{aligned}\delta m_c &= A\zeta \\ \Gamma &= \frac{B^2\zeta^2}{4\alpha} \sqrt{m_c^2 - 4m_1^2} \\ E_{11}(L_0) &= m_c + C\zeta\end{aligned}$$

ahol δm_c az A_c részecske elsőrendben adódó tömegkorrekciója a ζ perturbáció hatására. A form-faktor perturbációs számítás (7.45, 7.46, 7.48) eredményeit felhasználva pedig a következők adódnak:

$$A = \frac{f_{cc}}{m_c}$$

$$B = \frac{2f_{c11}}{m_c^{3/2}} \sqrt{\left(-\frac{1}{p} \frac{dp(L)}{dL}\right) \Big|_{L=L_0}} \quad (7.91)$$

$$C = \left(-\frac{1}{p} \frac{dp(L)}{dL}\right) \Big|_{L=L_0} \left(\frac{4f_{1111}}{m_c^2} + L_0 \frac{4f_{11}}{m_c}\right) \quad (7.92)$$

ahol

$$f_{cc} = F_{c\bar{c}}^{\Psi}(i\pi, 0) \quad , \quad f_{1111} = \lim_{\delta \rightarrow 0} F_{1111}^{\Psi}\left(\theta_1^{(c11)} + i\pi - \delta, -\theta_1^{(c11)} + i\pi - \delta, -\theta_1^{(c11)}, \theta_1^{(c11)}\right) \quad (7.93)$$

$$f_{c11} = \left| F_{c11}^{\Psi}\left(i\pi, \theta_1^{(c11)}, \theta_1^{(c11)}\right) \right| \quad (7.94)$$

és $p(L)$ az $A_1 A_1$ állapotot alkotó részecskék impulzusa a térfogat függvényében, amennyiben ezt a δ_0 háttér fázistolással számítjuk ki:

$$\begin{aligned} pL + \delta_0(E) &= 2n\pi \\ E &= 2\sqrt{p^2 + m_1^2} \end{aligned}$$

Megjegyzem, hogy Delfino, Grinza és Mussardo [DGM06] a (7.91) és (7.92) helyett más relációkat írt fel, amelyekről a cikkben részletesen megmutattuk, hogy miért helytelenek, és megadtuk a fönti összefüggések korrekt kvantumtérelméleti leszámaztatását. Ennek részleteire itt most nem térek ki. Annyit jegyeznek meg csupán, hogy a

$$\left(-\frac{1}{p} \frac{dp(L)}{dL} \right) \Big|_{L=L_0}$$

faktorok megjelenése azzal kapcsolatos, hogy a (7.84) egyenletek következtében a kétrészecske állapotok sűrűsége nem egyezik meg az egyrészecske állapotsűrűség négyzetével (az egyezés csak akkor áll fenn, ha nincs kölcsönhatás, azaz $\delta = 0$), és hogy ezek ugyanazok a korrekciós faktorok, amiket Lellouch és Lüscher (más megfontolások alapján) lokális operátorok mátrixelemeinek véges és végtelen térfogatbeli értékei közti összefüggésére korábban leszámaztatott [LL01].

7.3.3. A bomlási állandó meghatározása a TCSA spektrumból

7.3.3.1. A form-faktor perturbációs számítás összehasonlítása a TCSA-val (Ising modell)

A TCSA pontosságának ellenőrzése érdekében, valamint a (7.78) alatt definiált t paraméter perturbatív tartományának meghatározása céljából a form-faktor perturbációs számítás által jósolt (7.45) tömegkorrekciókat és (7.46) S mátrix korrekciót összehasonlítottuk a TCSA numerikus adataival. Az egyezést az A_1 és A_2 részecskék tömegkorrekcióira a 7.22 ábra mutatja, az S -mátrix teszt pedig a 7.23 ábrán láthatók. Mindkét teszt azt mutatta, hogy a $|t| \leq 0.005$ tartomány a t -ben perturbatívnak tekinthető.

A DSG₂ modell esetén a $\delta = -\pi/2$ miatt az elsőrendű korrekciók a 7.2.2.1 alatt tárgyaltaknak megfelelően eltűnnek, így itt hasonló összehasonlítás nem végezhető.

7.3.3.2. Numerikus módszerek a bomlási szélességek meghatározására

Az eredményekből a bomlásra jellemző f_{c11} mátrixelemet értékeltük ki, három eljárással:

1. A (7.90) Breit-Wigner kiértékelés alapján Γ kiszámítható:

$$\min \delta_1(E) - \max \delta_2(E) = 4\sqrt{-\beta\Gamma}$$

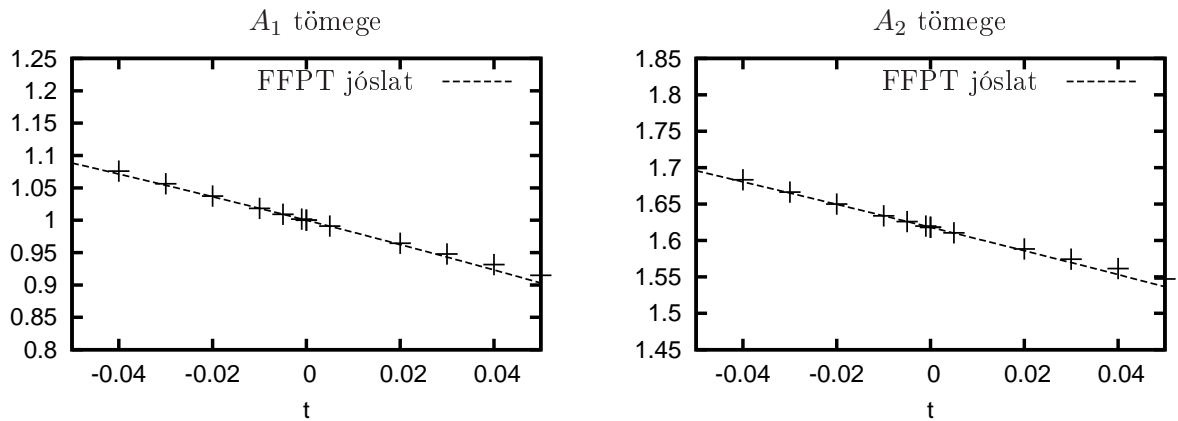
amiből a (7.48) segítségével f_{c11} meghatározható.

2. Az effektív Hamilton operátor módszerrel (7.87) alapján

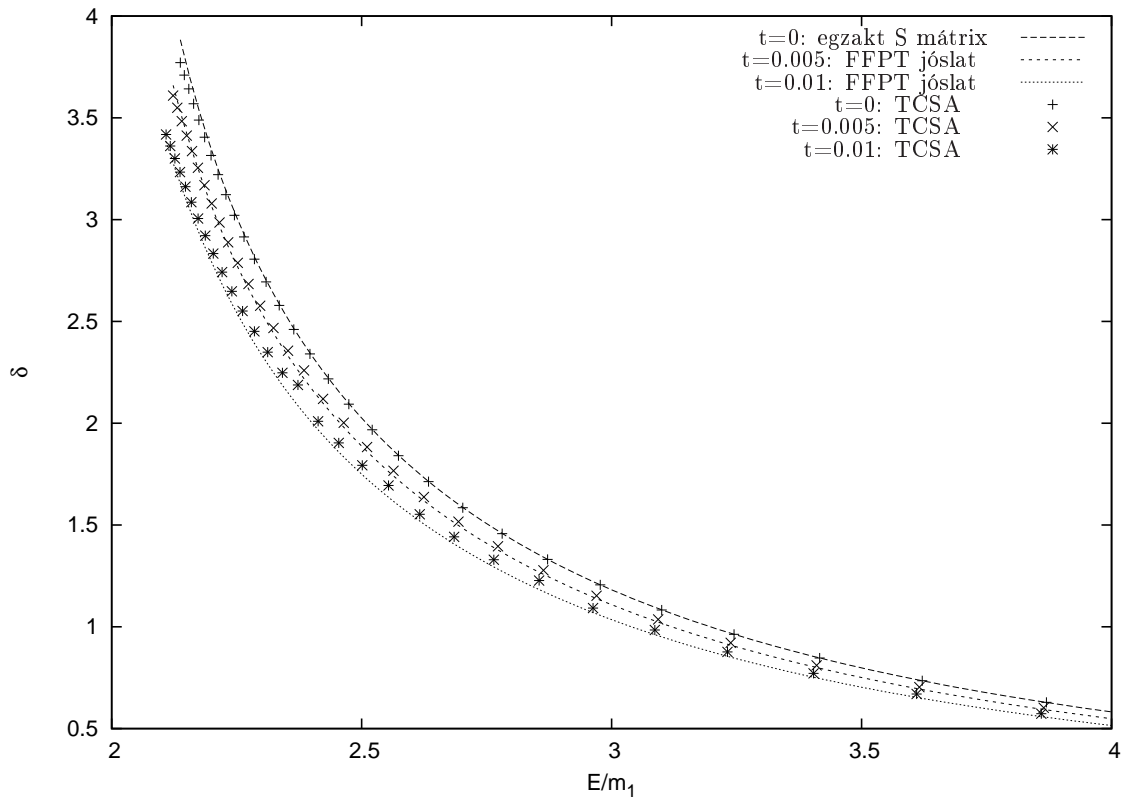
$$\delta E(L_{\min}) = 2|B\zeta|$$

és (7.91) alapján

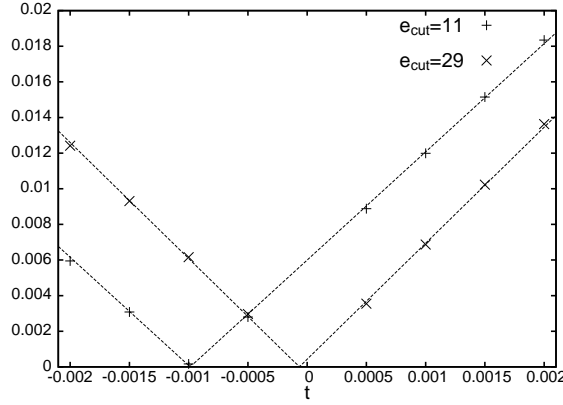
$$B = \sqrt{-\frac{1}{p} \frac{dp(L)}{dL} \Big|_{L=L_{\min}}} \frac{2f_{c11}}{m_c^{3/2}} \quad (7.95)$$



7.22. ábra. Az A_1 és A_2 tömegkorrekciója. A TCSA adatokat a keresztek jelölik (a numerikus hibák túl kicsik az ábrázoláshoz), a vonalak a form-faktor perturbációszámítás jóslatai.



7.23. ábra. Az $A_1 A_1$ fázistolás $t = 0, 0.005, 0.01$, TCSA-ból mérve és az elméleti jóslatok mint az E tömegközépponti energia függvénye (az m_1 ($\zeta = 0$ melletti) részecsketömeg egységeiben). A rezonancia hatása az (7.46) elsőrendű FFPT jóslattól való eltérésben jelentkezik: $E_c \sim m_c \approx 2.405m_1$ körül egy „váll” jelenik meg. A (7.90) alapján végzett Breit-Wigner kiértékelésnél ennek a „váll”-nak a nagy felbontású analizisét végezzük el.



7.24. ábra. A $\min \delta_1(E) - \max \delta_2(E)$ Breit-Wigner felhasadás mint t függvénye az Ising modellben $e_{\text{cut}} = 11$ és 29 esetén.

ahol L_0 -t L_{\min} -re cseréltük, ami t -ben vezető rendig nem számít. Hasonlóképpen, az állapotsűrűség korrekciós faktort

$$pL + \delta_{t=0}(E(p)) = 2n\pi$$

alapján számoljuk, ahol $\delta_{t=0}$ a $t = 0$ integrálható modell fázistolása. Ezt fejlesztett effektív Hamilton módszernek neveztük el (az eredetiben „improved mini-Hamiltonian method”, rövidítve imH).

- Összehasonlítás céljából Delfino, Grinza és Mussardo összefüggéseit is teszteltük, amelyek a bomlási állandó esetén abban térnek el, hogy B és f_{c11} kapcsolatára a

$$B = \frac{2f_{c11}}{L_{\min}^{1/2} m_c^{3/2}} \quad (7.96)$$

összefüggést adják. Ezt naív effektív Hamilton módszernek neveztük el (az eredetiben „naive mini-Hamiltonian method”, rövidítve nmH).

A rács térelméletben megszokott helyzettel ellentétben, nincsen jelentős statisztikus hibák. A TC SA mátrixokat dupla (16 tizedesjegy) pontossággal diagonalizáltuk, így bármilyen ebből adódó hiba teljes mértékben elhanyagolható. Ezzel szemben van két szisztematikus hibaforrás: a csonkolási hibák és a reziduális végesméret korrekciók.

A csonkolási hibák egy része abban nyilvánul meg, hogy a szintek az integrálható pontban nem metszik egzaktul egymást, amit úgy lehet modellezni, hogy (7.85)-hoz egy korrekciós mátrixot adunk a következő módon:

$$H = E_0 + (L - L_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & \alpha_2 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} A(L) & B(L) \\ B(L) & C(L) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta E_0 + a & b \\ b & \delta E_0 - a \end{pmatrix} \quad (7.97)$$

Ennek megfelelően a minimális felhasadás

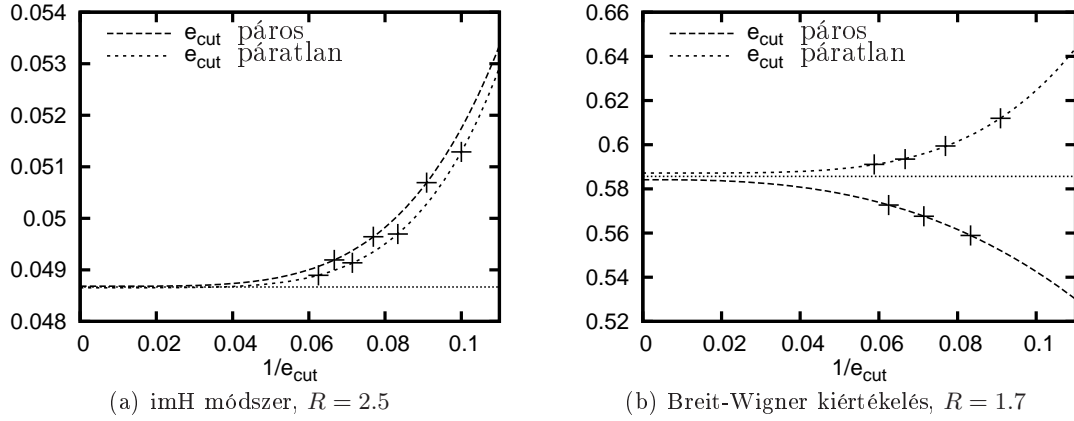
$$\delta E(L_{\min}) = 2|b + B\zeta| = 2|B(\zeta - \zeta_0)| \quad (7.98)$$

de a meredekségből B még mindig meghatározható. Az a paraméter az L_{\min} értékében, míg δE_0 az E_0 rezonancia energia értékében megnyilvánuló csonkolási hibának felel meg. A Breit-Wigner kiolvasás hasonló módszerrel korrigálható (ld. 7.24 ábra).

Ezzel az e_{cut} levágás és a vizsgált szintmetszés megválasztása függvényében adódik egy érték f_{c11} -re. Ezután az

$$f(e_{\text{cut}}, L) = f(L) + a(L)e_{\text{cut}}^{-x} \quad (7.99)$$

alakú függvénnyel e_{cut} függvényére extrapoláljuk, ahol $f(L)$ a mérendő f fizikai mennyiség végtelen levágáshoz, de véges L térfogathoz tartozó értéke. A páros és a páratlan e_{cut} értékekre adódó



7.25. ábra. e_{cut} szerinti extrapoláció a DSG_2 modellben ($r = \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}$ a konform bozon kompaktifikációs sugara)

adatokat külön kell extrapolálni. Ennek oka, hogy a TCSA-ban csak akkor lépünk minden egyes konform modulban pontosan egy szintet, ha e_{cut} értékét kettővel változtatjuk, így a páros és páratlan értékeknél számolt adatok külön alkotnak konzisztens sorozatot. A módszert a 7.25 ábra mutatja be.

A másik szisztematikus hibaforrás a reziduális végesméret korrekciókból adódik. Lüscher eredményei szerint ezek egy $\exp(-ML)$ alakú faktorról vannak elnyomva, ahol M egy jellemző tömegskála (tipikusan a legkönnyebb részecske tömege). Amennyiben a bomlási állandót több szintmetszésnél is meghatároztuk, amelyek az L_1, \dots, L_n térfogatoknál jelentkeztek, az f_{c11} form-faktor L_i -nél történt meghatározására úgy gondolhatunk, hogy az egy $f_{c11}(L)$ függvény $L = L_i$ pontban felvett értéke, amelyre

$$f_{c11}(L) = f_{c11} + O(e^{-ML})$$

ahol f_{c11} a végtelen térfogatban érvényes eredmény. Sajnos jelenlegi eredményeink ennek az extrapolációnak a végrehajtását nem teszik lehetővé¹¹.

7.3.3.3. Eredmények az Ising modellben

A $A_4 \rightarrow A_1 + A_1$ bomlást három szintmetszésnél mértük, az $A_5 \rightarrow A_1 + A_1$ bomlást egynél. Az eredményeket a 7.4 és 7.5 táblázat tartalmazza. 7.4-ből azt látjuk, hogy míg a korrekt effektív Hamilton operátorból (7.95) alapján számolt mátrixelem összhangban van a Breit-Wigner kiértékeléssel, a Delfino-Grinza-Mussardo-féle (7.96) összefüggéssel számolt mátrixelem jelentős eltérést mutat, és nagy térfogatnál jócskán „túllövi” az elméleti jóslatot, míg a másik két módszer 1 %-on belül egyezést mutat vele. f_{511} esetén eleve nagyobb hibákat várunk (magasabb energiaszintről lévén szó, a csonkolási hibák nagyobbak), de a 7.5 táblázat adatai szerint még így is pár %-on belül egyezik az eredmény az elméleti várakozással.

7.3.3.4. Eredmények a DSG_2 modellben

Kényelmi okokból a csatolást az r kompaktifikációs sugárral paraméterezem:

$$\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{r}, \quad \lambda = 2r^2 - 1$$

Az eredményeket a 7.6 táblázat foglalja össze. Ismét látható, hogy a Breit-Wigner kiértékeléssel az imH módszer konzisztens, míg az nmH nem, továbbá abban a tartományban ($r = 1.44$ és

¹¹ A véges térfogatú form-faktorok jelenleg folyamatban lévő vizsgálatától (ld. 9.2 alatt) várható egy erre alkalmas módszer kifejlesztése.

n	$m_1 L_0$	nmH (o/e)	imH (o/e)	Breit-Wigner (o/e)
1	18.152	37.658/37.662	33.422/33.426	33.255/33.336
2	24.900	38.871/38.939	35.736/35.799	34.574/34.887
3	34.184	39.099/*	36.829/*	36.318/*

7.4. táblázat. f'_{411} mért értéke. n a szintmetszés sorszáma, L_0 a helye $t = 0$ -nál, a többi oszlopban a három kiértékelés adatai, külön extrapolálva a páratlan és a páros e_{cut} értékekre („o”, illetve „e” jelöli; * azt jelzi, amikor nem lehetett megfelelően illeszteni az extrapolációs függvényt. Az elméleti jóslat (7.79, 7.80) alapján $f'_{411} = 36.730$.

n	$m_1 L_0$	naive mH (27/28)	improved mH (27/28)	Breit-Wigner (27/28)
1	23.206	21.011/21.120	20.244/20.349	18.551/18.612

7.5. táblázat. f'_{411} mért értéke. n a szintmetszés sorszáma, L_0 a helye $t = 0$ -nál, a többi oszlopban a három kiértékelés adatai. Mivel nem lehetett megbízhatóan elvégezni a levágás szerinti extrapolációt, ezért az $e_{\text{cut}} = 27$ és 28 mellett mért értékeket adom meg.

$r = 1.5$), ahol a reziduális végesméret effektusok ($e^{-m_1 L_0}$) kicsik, az nmH szignifikánsan eltér az elméleti jóslattól. Sajnos a kiértékeléshez csak a legkisebb térfogatértéknél előforduló szintmetszést lehetett felhasználni a csonkolási hibák nagysága miatt.

7.3.4. Általánosítási lehetőségek

A rezonanciák szélességének végesméret spektrumból történő meghatározására kifejlesztett Breit-Wigner (7.90), illetve effektív Hamilton mátrix módszer (7.95) $3 + 1$ dimenzióra is általánosítható. Ehhez mindössze a (7.84) egyenletek Lüscher által levezetett megfelelőjét kell használni [Lus91b]. Vegyük észre továbbá, hogy nem kell feltételeznünk azt sem, hogy a bomlás egy olyan kölcsönhatásnak lenne tulajdonítható, ami perturbatíván kezelhető (azaz a hadronok gyenge bomlásaival analóg). A (7.48) használatával f_{c11} a (7.95) kiértékelési formulából kiküszöbölhető, és a szélesség közvetlenül kifejezhető a szintek közötti minimális felhasadással:

$$\Delta E(L_{\min}) = 4\sqrt{\Gamma} \sqrt{\frac{m_c}{2^{1-\delta_{ab}} m_a} |\sinh \theta^{(cab)}| - \frac{1}{p} \frac{dp}{dL} \Big|_{L=L_{\min}}}$$

Az így kapott formula alkalmazhatóságának pedig semmi más feltétele nincs, mint hogy a rezonancia maga keskeny legyen. Érvelhetünk úgy is, hogy ha nincs is külön paramétere a bomlást okozó perturbációnak, egy keskeny rezonancia esetén akkor is elképzelhetjük, hogy maga a Γ bomlási szélesség játssza ζ szerepét (analóg érveléssel szoktak élni az analitikus S mátrix elméletben az instabil részecskék leírása során).

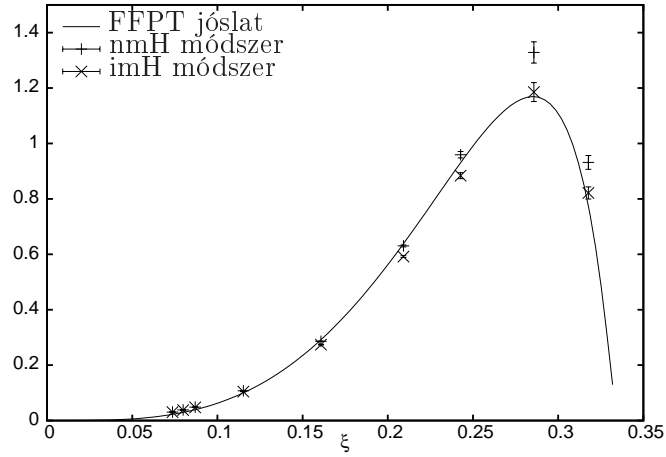
7.4. Nemunitér kvantumtérelméletek spektruma

Ebben a fejezetben imagináriusan csatolt affin Toda térelméletekkel (affine Toda field theory, ATFT) és a redukciójukkal előálló perturbált konform kvantumtérelméletekkel foglalkozom. Egy ATFT úgy adható meg, hogy tekintünk egy \hat{g} affin Lie-algebrát¹², amelynek egyszerű gyökei

¹² Az affin Lie algebrák elméletét ld. V. Kac [Kac] könyvében.

r	nmH	imH	BW (e/o)	FFPT	ML_0	$e^{-m_1 L_0}$
1.44	0.931 ± 0.025	0.821 ± 0.021	*/*	0.7759	16.469	10^{-7}
1.5	1.328 ± 0.038	1.185 ± 0.034	*/*	1.1694	12.398	$2 \cdot 10^{-6}$
1.6	0.959 ± 0.012	0.883 ± 0.011	0.904/0.893	0.9303	11.588	0.0002
1.7	0.630 ± 0.004	0.592 ± 0.003	0.584/0.587	0.6383	11.927	0.0005
1.9	0.286 ± 0.001	0.274 ± 0.001	*/0.269	0.2917	13.615	0.0011
2.2	0.1076 ± 0.0002	0.1046 ± 0.0002	0.1100/0.1100	0.0999	17.475	0.0018
2.5	$0.04867 \pm 2 \cdot 10^{-5}$	$0.04767 \pm 2 \cdot 10^{-5}$	*/0.0499	0.0392	22.309	0.0023
2.6	$0.03845 \pm 6 \cdot 10^{-5}$	$0.03773 \pm 6 \cdot 10^{-5}$	0.0412/0.0412	0.0295	24.089	0.0024
2.7	$0.03075 \pm 5 \cdot 10^{-5}$	$0.03022 \pm 5 \cdot 10^{-5}$	0.0334/0.0334	0.0224	25.946	0.0025

7.6. táblázat. s_{311} mért értékei. FFPT az elméleti érték, a két utolsó oszlopban a szintmetszés helye, illetve a reziduális végesmérték effektusokat jellemző elnyomási faktor értéke látható. * jelöli azokat az eseteket, amikor a Breit-Wigner kiértékelést nem lehetett értelmesen extrapolálni a levágás függvényében.



7.26. ábra. Az s_{311} (7.83) elméleti értéke $\xi = 1/\lambda$ függvényében, a 7.6 táblázat numerikus adataival együtt (az imH módszer adatai a Breit-Wigner kiértékeléstől nem különböznek lényegesen, ezért az utóbbiakat mellőztem). A becsült hibák csak a csonkolási hibákat tartalmazzák, a reziduális végesmérték effektusok becslését (tekintve, hogy minden csatolási állandónál csak egy szintmetszés volt értékelhető) nem lehetett elvégezni.

legyenek $\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\alpha}_r$, ahol r az algebra rangja, és a gyökök r -dimenziós valós vektorok. Legyen továbbá a $\vec{\alpha}_0$ ún. affin gyök kifejezése a többivel

$$n_0 \vec{\alpha}_0 = - \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$$

ahol n_0, n_1, \dots, n_r relatív prím egész számok. Legyen továbbá $\vec{\Phi}$ egy r komponensű skalármező. Ekkor a \hat{g} affin Toda elméletet az

$$\mathcal{A}_{\text{ATFT}} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\Phi} \cdot \partial^\mu \vec{\Phi} - \frac{m^2}{b^2} \sum_i n_i \exp(b \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\Phi}) \right) \quad (7.100)$$

klasszikus hatás adja meg. Amennyiben $b = i\beta$ imaginárius, akkor imagináriusan csatolt ATFT-ről beszélünk. Ennek legegyszerűbb példája a sine-Gordon elmélet, amelyre $\hat{g} = a_1^{(1)}$, $r = 1$, $\alpha_1 = -\alpha_0 = \sqrt{2}$ és ebből a hatásra

$$\int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{m^2}{\beta^2} \cos \sqrt{2} \beta \Phi \right)$$

adódik (ahol a paraméterezés a szokásos konvenciónktól eltér). Az affin Toda elméletek integrálhatók, és valós csatolás esetén unitér kvantumtérelméletek diagonális szórással [BCDS89, BCDS90, CDS93]; egy jó összefoglalást ad róluk Corrigan [Cor94]. Az imagináriusan csatolt elmélet alapvető gerjesztései a sine-Gordon modell természetes általánosításaként adódó szolitonok; ezek egy nemlokális szimmetria, az $U_q(\hat{g})$ algebra multipliettjeibe rendeződnek [BL91], aminek segítségével S mátrixuk egzaktul meghatározható [Smi91, Eft93, Hol93a, GM95, GMW96, Tak97b, Tak97c]. Bár az imaginárius csatolás esetén (a sine-Gordon modell kivételével) a hatás és így a Hamilton függvény is komplex, Olive, Turok és Underwood észrevették [OTU93a], hogy a szoliton megoldások energiája és impulzusa valós, Freeman pedig megmutatta, hogy az összes magasabb spinű lokális megmaradó mennyiség értéke is valós [Fre95], így az irodalomban többször is előfordult az a felvetés, hogy ezek a modellek konzisztens módon unitérré tehetők. Ezáltal remélhető volt, hogy a szoliton dinamika nemtriviális modelljeit kaphatjuk meg. A valós csatolású elméletben előforduló gyenge/erős csatolás dualitás példájára azt gondolták, hogy ezzel a hűrelméletben és szuperszimmetrikus mértékelméletekben fontos szerepet játszó nemper-turbatív dualitási szimmetriák egyszerűsített modelljeiként használhatók. A Dashen, Hasslacher és Neveu módszerét [DHN74, DHN75a, DHN75b] követő szemiklasszikus kvantálás eredményei azonban kezdeti sikerek [Hol93b] után problémákba ütköztek [DG95, MW95], mivel messze nem volt világos, hogyan kell megválasztani a hermitikus konjugálást (vagy másképp a $\vec{\Phi}$ tér valósági feltételét). Khastgir és Sasaki a klasszikus megoldásokat vizsgálva olyan eseteket talált, amikor az energia komplex volt, maga a megoldás pedig véges idő alatt szingulárisává vált [KS96]. Természetesen elképzelhető, hogy ezek nem a „megengedett” konfigurációk közé tartoznak.

Másrészt ezek az elméletek, vagyis inkább a kvantumcsoport szimmetriával kapott egzakt S mátrixok megfelelő redukciójával [RS90, BL90, FL92, Smi91, Tak97a] sikeres leírást lehetett adni perturbált konform térelméletekre, többek között unitér modellekre is, ami ismét abba az irányba mutat, hogy mégiscsak létezik valamiféle konzisztens értelmezés.

A fenti tisztázatlan kérdések motiválták Wattsot és engem arra, hogy részletesebben megvizsgáljuk ezen elméletek spektrumát [TW99, TW02]. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy ebben az analízisben a végesmérték effektusokra vonatkozó ismeretek lényeges szerepet játszanak.

7.4.1. Általános megfontolások

7.4.1.1. Unitaritás és valós spektrum

Integrálható kvantumtérelmélet S mátrixát teljes mértékben meghatározzák a kétrészecske amplitúdók¹³. Ezek minden esetben kielégítik a

$$\sum_{k,l} S_{BC}(\theta)_{ij}^{kl} S_{CB}(-\theta)_{lk}^{nm} = \delta_i^m \delta_j^n \quad (7.101)$$

feltételt. Ha az elmélet S mátrixa (az imaginárius affin Toda térelméletekhez hasonlóan) valamilyen nemlokális töltések által alkotott kvantumcsoport alatt invariáns, akkor a kétrészecske S mátrixok éppen a kvantumcsoport ún. R mátrixaival arányosak, és a fenti reláció az algebrai struktúra egyik következménye, ezért a következőkben csoportunitaritásnak fogom nevezni. Amennyiben a kétrészecske S mátrix ezenfelül teljesíti a

$$\left(S_{BC}(\theta)_{ij}^{kl} \right)^* = S_{CB}(-\theta^*)_{lk}^{ji} \quad (7.102)$$

ún. hermitikus analiticitási feltételt [Mir99] akkor S_{BC} egyben egy unitér mátrix, azaz (valós θ -ra, azaz a fizikai tartományban)

$$\sum_{k,l} \left(S_{BC}(\theta)_{ij}^{kl} \right)^* S_{BC}(\theta)_{i'j'}^{kl} = \delta_{i'}^i \delta_{j'}^j \quad (7.103)$$

Egy kvantumtérelmélet akkor unitér, ha az állapottéren definiált skalárszorzat pozitív definit és az S mátrix erre nézve unitér. Ehhez (mint azt a Lee-Yang modell példáján C.1.2 alatt illusztráltam) nem elégséges a kétrészecske S mátrix (7.103) szerinti unitaritása, mivel ez még nem jelenti azt, hogy a skaláris szorzat pozitív definit lenne.

Amennyiben a spektrum valósságát vizsgáljuk, érdemes megvizsgálni a 5.1.1 alatt leírt Bethe-Yang egyenleteket. Először is világos, hogy a spektrum akkor valós, ha a (5.2) transzfermátrixok valamennyi sajátértéke (valós rapiditások mellett) egységnyi abszolút értékű komplex szám. Ez teljesül, ha a transzfermátrixok unitérek, és könnyen belátható, hogy mindig ez a helyzet, ha valamennyi kétrészecske szórásmátrix unitér. Ezek szerint unitér kvantumtérelmélet spektruma (legalábbis a Bethe-Yang egyenlet által adott közelítésben, ami elég nagy térfogatban egzaktnak tekinthető) mindig valós, ami persze nem meglepő. Sokkal érdekesebb az, hogy ezek szerint nem-unitér kvantumtérelmélet spektruma is valós, ha a kétrészecske amplitúdók mátrix értelemben (azaz (7.103)-nak megfelelően) unitérek.

Nem csak unitér mátrixok rendelkezhetnek azzal a tulajdonsággal, hogy minden sajátértékük egy fázis, az ilyen mátrixok azonban mindig hasonlóak egy unitér mátrixhoz. Mivel a spektrum valóssága azt jelenti, hogy az összes multirészecske transzfer mátrixnak hasonlóknak kell lenni valamilyen unitér mátrixszal a rapiditások tetszőleges valós értéke mellett, ezt nem olyan könnyű teljesíteni. Egy lehetőség az, ha létezik az egyrészecske állapotoknak egy (esetleg rapiditásfüggő) átdefiniálása, ami a kétrészecske S mátrixot unitér mátrixszá teszi. Ahhoz, hogy ez konzisztens legyen minden magasabb részecske állapotra is, elég az, ha a magasabb részecske állapotokon ez a transzformáció az egyrészecske transzformációk direkt szorzataként hat.

A fentiekhez hasonló megfontolások tehetők kinkek esetében is.

7.4.1.2. A tanulmányozott modellek

A következő modelleket fogom elemezni:

1. *Az eredeti imagináriusan csatolt ATFT modellek.* A periodikus potenciál miatt ezeknek végtelen sok degenerált vákuuma van, a spektrum egy fundamentális szoliton multipllettől építhető fel.

¹³ Az egzakt S mátrix elmélet alapjait ld. C.1.1 alatt.

- a) Az $a_1^{(1)}$ elmélet a sine-Gordon modell:

$$\mathcal{A}_{\text{sG}} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\nu \Phi \partial^\nu \Phi + \frac{m_0^2}{\beta^2} \cos \beta \Phi \right)$$

ami egy $U_q(a_1^{(1)})$ kvantum affin szimmetriával rendelkezik, ahol $q = \exp(8\pi^2 i / \beta^2)^{14}$.

- b) Az $a_2^{(2)}$ elmélet a Zhiber-Mikhailov-Shabat (ZMS) modell, aminek hatása

$$\mathcal{A}_{\text{ZMS}} = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \partial_\nu \Phi \partial^\nu \Phi + \frac{m_0^2}{\gamma^2} \left(\exp(2i\gamma\Phi) + 2 \exp(-i\gamma\Phi) \right) \right]$$

A

$$q = \exp(\pi i / \gamma^2) \quad (7.104)$$

jelölés mellett a modell $\mathcal{U}_q(a_2^{(2)})$ kvantumcsoport szimmetriával bír. A fundamentális gerjesztés egy szoliton tripllett, és a kvantumszimmetria ennek kétrészeske S mátrixát teljesen meghatározza [Smi91]. Bevezetve a

$$\xi = \frac{2\pi}{3} \frac{\gamma^2}{2\pi - \gamma^2} \quad (7.105)$$

paramétert, a fundamentális kink S mátrixa

$$S_{K_0 K_0}(\theta) = R(x, q) S_0(\theta, \beta) \quad x = \exp \frac{2\pi\theta}{\xi} \quad (7.106)$$

ahol $R(x, q)$ az $U_q(a_2^{(2)})$ fundamentális R mátrixa (explicite ld. [Smi91, Eft93, Tak97a]) és amennyiben ezt a mátrixot kellően normáljuk, akkor S_0 valós rapiditásokra fázis. $\xi > \pi$ -re a fundamentális szoliton adja a teljes spektrumot. Amennyiben $\xi < \pi$, akkor lélegzők jelennek meg, $\xi < 2\pi/3$ esetén pedig további (gerjesztett) szolitonok. A lélegzőket tartalmazó S mátrix amplitúdók skalárok, a gerjesztett szolitonok amplitúdói pedig mindig

$$S_{K_m, K_n}(\theta) = S_0^{m,n}(\theta, \gamma) R((-1)^{m+n} x, q) \quad (7.107)$$

alakúak, ahol S_0^{mn} egy fázisértékű skalár faktor.

- c) A továbbiakban szó lesz még az $a_2^{(1)}$ elmületről, ami két skalár térrel ($\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2)$) írható fel, a gyökök az $SU(3)$ algebrának felelnek meg:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{2}(1, 0) \quad , \quad \alpha_2 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad , \quad \alpha_0 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ n_0 &= n_1 = n_2 \end{aligned} \quad (7.108)$$

és a hatás (7.100) alapján egyszerűen felírható. A modell fundamentális gerjesztése két szoliton tripllett, amelyek egymás konjugáltjai és a $\mathbf{3}$ illetve $\bar{\mathbf{3}}$ ábrázolásoknak felelnek meg. A szolitonok S -mátrixát Nakatsu határozta meg [Nak91], munkáját később Hollowood általánosította az $a_n^{(1)}$ esetre [Hol93a]. A Gaudenberger és munkatársai által használt konvenciókat követve [GMW96] bevezetem az

$$x = \exp(3\lambda\theta) \quad , \quad q = -\exp(i\pi\lambda) \quad , \quad \lambda = \frac{4\pi}{\beta^2} - 1 \quad (7.109)$$

jelöléseket. A szoliton triplettek különböző gerjesztettségi fokokban fordulhatnak elő; ezeket $A_k^{(a)}$ -val jelölöm, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, [\lambda]$ és $a = 1$ a $\mathbf{3}$, $a = 2$ pedig a $\bar{\mathbf{3}}$ multipllettnak felel meg. A megfelelő tömegek

$$M_k^{(A)} = 2M \cos \left(\frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{k}{\lambda} \right) \right)$$

¹⁴ Itt β -t átdefiniáltuk, hogy megegyezzen a szokásos konvencióval.

és a töltéskonjugálás hatása a szolitonokon: $A_k^{(2)} = \overline{A_k^{(1)}}$. Ezenfelül jelen lehetnek lélegzők is: a fundamentális szoliton kötött állapotaiként két egymáshoz konjugált lélegző sorozat áll elő: $B_p^{(a)}$ ahol $p = 1, 2, \dots [\frac{3\lambda}{2}]$ és tömegük

$$M_p^{(a)} = 2M \sin\left(\frac{\pi p}{3\lambda}\right)$$

valamint $B_p^{(2)} = \overline{B_p^{(1)}}$ a töltéskonjugálás alatt (a kvantumcsoport szempontjából ezek az állapotok szinglettek). A szolitonok kétrészecske S mátrixai [Nak91]

$$\begin{aligned} S_{A_k^{(a)} A_l^{(a)}}(\theta) &= f_{kl}(\theta, \lambda) R_{\mathbf{33}}(\eta_{kl} x, q) \\ S_{A_k^{(a)} A_l^{(b)}}(\theta) &= \tilde{f}_{kl}(\theta, \lambda) R_{\mathbf{3}\bar{\mathbf{3}}}(\tilde{\eta}_{kl} x, q) \quad a \neq b \end{aligned} \quad (7.110)$$

ahol $R_{\mathbf{33}}$ és $R_{\mathbf{3}\bar{\mathbf{3}}}$ a megfelelő kvantumcsoport R mátrixok, f_{kl} , \tilde{f}_{kl} mindig fázis, ha θ valós és $\eta_{kl} = -\tilde{\eta}_{kl} = (-1)^{k+l}$.

2. *Hajtogatott modellek.* A potenciál periodicitását kihasználva minden esetben lehet definiálni a megfelelő hajtogatott elméletet. Itt csak az $a_1^{(1)}$ és $a_2^{(2)}$ esettel foglalkozom, ahol egyetlen skalártér van¹⁵. Az első eset maga a 7.1.4 alatt tárgyalt hajtogatott sine-Gordon modell, a második eset pedig ezzel teljesen analóg módon kezelhető, spektruma és szórási amplitúdói az eredeti ATFT segítségével könnyen felírhatók.
3. *Redukált (RSOS) modellek.* A csatolási állandó bizonyos „racionális” értékeinél az imaginárius ATFT modellek konform minimálmodellek perturbációira redukálhatók, amelyek a C.1.5 alatt tárgyalt kink típusú S mátrixokkal rendelkeznek.
 - a) Az $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{1,3}$ elmélet a sine-Gordon redukciója a $\beta^2 = 8\pi p/p'$ csatolásnál. A nemlineáris integrálegyenletre vonatkozó alatti eredményeket a hajtogatott sine-Gordon modell alatti analízisével összevetve, ennek a modellnek a véges térfogatbeli spektrumáról elmondhatjuk, hogy a $2p$ -hajtogatott sine-Gordon modell spektrumának egy részével azonos (a redukció során – új skalár szorzat bevezetése mellett – a Hilbert teret is meg kell szorítani [RS90]).
 - b) Az $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{12}$ modell a ZMS modell redukciója $\gamma^2 = \pi p/p'$ mellett [Smi91, Eft93]. (A $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{2,1}$ modellek is ebben az osztályban vannak az $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{2,1} \equiv \mathcal{M}_{p',p} + \Phi_{1,2}$ azonosítás révén). Ennek a modellnek az alapállapotaira Dorey és Tateo írták le a DdV egyenletet [DT00]. Eredményeiket megvizsgálva adódik az a feltevés, hogy a perturbált minimálmodell spektruma ebben az esetben a p -hajtogatott ZMS modell részét képezi.
 - c) Az $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{1,5}$ modell a ZMS modell redukciója $\gamma^2 = 4\pi p/p'$ mellett, aminek S mátrixát [Tak97a]-ban határoztam meg (ld. még C.1.6). Dorey és Tateo fent idézett munkája nyomán az a feltevés tűnik megalapozottnak, hogy ebben az esetben a spektrum a $2p$ -hajtogatott ZMS modell spektrumának része.

Szeretném hangsúlyozni, hogy míg a $\Phi_{1,3}$ modellek esetén az összefüggés a hajtogatott sine-Gordon modell spektrumával lényegében Al. B. Zamolodchikov [Zam94a, Zam94b] munkája óta ismert (bár a gerjesztett állapotokról ezt csak a Feverati és Ravaninivel közös[FRT00] munkánkban mutattuk meg részletesen), a másik két esetben a kapcsolatot először a Watts-szal közös [TW02] cikkünkben fogalmaztuk meg és demonstráltuk (ugyanitt megjegyeztük, hogy hasonló kapcsolatot várunk más ATFT modellek és a belőlük redukcióval kapható perturbált konform térelméletek spektruma között is). Ez azért nemtriviális eredmény, mert a redukciót lehetővé tévő kvantumcsoport az elméletnek csak végtelen térfogatban szimmetriája, így a véges térfogatbeli spektrumok közötti kapcsolat messze nem egyszerű kérdés (a fenti állítások szigorúan véve ma sem tekinthetők bizonyítottaknak, de az ezeket alátámasztó ellenőrzések fényében nincs okunk kételkedni bennük).

¹⁵ Általános esetben a periodicitás a megfelelő Lie algebra súlyrácsával adható meg

7.4.2. Imagináriusan csatolt affin Toda elméletek véges térfogatú spektruma

7.4.2.1. $a_2^{(1)}$

A kétrészecske állapotok esetén a releváns transzfer mátrixok megegyeznek a megfelelő S mátrixsal, így a spektrum vizsgálatakor célszerű ebből kiindulni. A (7.109) jelölésben az $R_{33}(x, q)$ mátrix sajátértékei

$$1, \quad \left(\frac{1 + q\sqrt{x}}{q + \sqrt{x}} \right), \quad \left(\frac{1 - q\sqrt{x}}{q - \sqrt{x}} \right)$$

mindegyik háromszorosan degenerált, ezek mindig fázisok, ha $x > 0$ and q fázis. Azonban $x < 0$ esetén ez nem igaz, így (7.110) alapján az elmélet spektruma mindenképpen komplex, és semmiképpen sem lehet unitér, ha a spektrumban jelen vannak gerjesztett szolitonok is. $R_{33}(x, q)$ sajátértékei pedig 1 (hatszorosan degenerált), valamint

$$\left(\frac{1 - qx^{1/3}}{q - x^{1/3}} \right), \quad \left(\frac{1 - qx^{1/3} e^{2\pi i/3}}{q - x^{1/3} e^{2\pi i/3}} \right), \quad \left(\frac{1 - qx^{1/3} e^{4\pi i/3}}{q - x^{1/3} e^{4\pi i/3}} \right)$$

amik nem fázisok. Így (Hollowood állításaival [Hol93a] szöges ellentétben) az $a_2^{(1)}$ elmélet nem unitér, sőt spektruma is mindig komplex (a tasztító tartomány egyes diszkrét pontjaitól eltekintve).

A lélegzők S mátrixát a vonzó tartományban Gandenberger [Gan95] határozta meg először:

$$\begin{aligned} S_{AB} &= S_{\overline{BA}} = S_{\overline{AB}} = S_{B\overline{A}} = \frac{\{3+B\}\{3-B\}}{\{-1+B\}\{7-B\}} \\ S_{BA} &= S_{\overline{AB}} = S_{\overline{BA}} = S_{A\overline{B}} = \frac{\{-7+B\}\{1-B\}}{\{-3-B\}\{-3+B\}} \end{aligned} \quad (7.111)$$

ahol

$$\{x\} = \sinh\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi x}{12}\right), \quad B = -\frac{1}{2\pi} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2/4\pi} = -\frac{2}{\lambda}$$

és rövid jelölésként $A=A_0^{(1)}$ a fundamentális szoliton, \overline{A} az antiszoliton, $B=B_1^{(1)}$ az első lélegzőt, $\overline{B}=B_1^{(2)}$ pedig a konjugáltját jelöli. Látható, hogy ezek a szórási amplitúdók sem fázisok, ennek oka, hogy nem teljesítik a (7.102) hermitikus analiticitási feltételt.

7.4.2.2. $a_2^{(2)}$

A (7.106) alatti S mátrixban szereplő $R(x, q)$ sajátértékei

$$1, \quad \left(\frac{1 - q^2\sqrt{x}}{q^2 - \sqrt{x}} \right), \quad \left(\frac{1 + q^2\sqrt{x}}{q^2 + \sqrt{x}} \right)$$

(mindhárom kétszeresen degenerált), valamint három másik λ sajátérték, amelyek a

$$\begin{aligned} &(x - q^4)(x + q^6)\lambda^3 + q^6(2 + q^2)(\lambda^2 + x^2\lambda) \\ &\quad + x(q^2 - 1)(1 - 3q^4 + q^8)(\lambda^2 + \lambda) \\ &- q^2(1 + 2q^2)(x^2\lambda^2 + \lambda) + (1 - q^4x)(1 + q^6x) = 0 \end{aligned}$$

egyenlet gyökei. Hasonlóan az előző esethez, ezek sem fázisok, ha $x < 0$ (kivéve, ha $q^4=1$), azaz a spektrum mindenképpen komplex, ha gerjesztett szolitonok is jelen vannak ($\xi < 2\pi/3$). Ezért az alábbiakban feltesszük, hogy gerjesztett szolitonok a spektrumban nincsenek jelen.

Ha $x > 0$, akkor a kétszeresen degenerált három sajátérték mindenképpen fázis, a harmadfokú egyenlet megoldásai azonban csak akkor, ha $1/4 < |\arg(q)/\pi| < 3/4$. Így tehát remény látszik arra, hogy ebben az esetben valós legyen a spektrum (a lélegzőket tartalmazó szórásamplitúdók ebben a tartományban mind fázisok).

Az n -részeske transzfermátrixok vizsgálata¹⁶ azt mutatja, hogy azok sajátértékei akkor fázisok, ha

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq \left| \frac{\arg(q)}{\pi} \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

valamint a

$$\left| \frac{\arg(q)}{\pi} \right| = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2m} \quad , \quad 1 \leq m \leq n$$

izolált pontokban. Ez azt jelenti, hogy a modell spektruma (az összes állapotot figyelembe véve) csak az

$$\left| \frac{\arg(q)}{\pi} \right| = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{n} \right) \quad (7.112)$$

izolált pontokban lehet valós.

A magasabb k -hajtogatott modellek vizsgálata elvileg további kényszereket adhatna, mivel ezek az eredeti modell spektrumán túl csavart szektorokat is tartalmaznak. Számításaink szerint azonban ezek spektruma is pontosan a (7.112) által megadott csatolási állandóknál valós.

7.4.3. Klasszikus időkések és S mátrix

A fenti problémák mélyebb megértésének érdekében most egy rövid kitérőt teszünk végtelen térfogatba, hogy az ATFT klasszikus dinamikáját felhasználhassuk.

Az $a_2^{(1)}$ elmélet Lagrange-sűrűségét

$$\mathcal{L}_{a_2^{(1)}} = \frac{1}{2} (\partial_t \vec{\Phi} \cdot \partial_t \vec{\Phi} - \partial_x \vec{\Phi} \cdot \partial_x \vec{\Phi}) + \frac{\mu^2}{\beta^2} \sum_{i=0}^2 \left(\exp(i\beta \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\Phi}) - 1 \right) \quad (7.113)$$

alakba írva (a jelöléseket ld. (7.100), (7.108)), a vákuum állapotok

$$\vec{\Phi} = \frac{2\pi}{\beta} (n_1 \vec{\lambda}_1 + n_2 \vec{\lambda}_2) , \quad (7.114)$$

ahol $\vec{\lambda}_i$ az $a_2^{(1)}$ algebra fundamentális súlyai (azaz $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\alpha}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$) és $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. A véges energiás megoldások $|x| \rightarrow \infty$ egy vákuumkonfigurációhoz tartanak, és a sine-Gordon elmélet analógiájára (ld. (C.10))

$$\vec{\Phi}|_{x \rightarrow \infty} - \vec{\Phi}|_{x \rightarrow -\infty} = \frac{2\pi}{\beta} (m_1 \vec{\lambda}_1 + m_2 \vec{\lambda}_2) . \quad (7.115)$$

összefüggés definiálja az (m_1, m_2) topologikus töltéseket. Az $a_n^{(1)}$ Toda elméletek szoliton megoldásait Hollowood adta meg [Hol92], a lélegzőket Harder és munkatársai [HIM95], a szolitonok szórását pedig Olive és munkatársai [FJKO94]. Az általános N -szoliton megoldás alakja az $a_2^{(1)}$ elméletben a következő:

$$\begin{aligned} -\beta \vec{\Phi} &= \sum_{j=0}^2 \alpha_j \log \tau_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\log(\tau_1^2/(\tau_0 \tau_2)), \log(\tau_2/\tau_0)) \\ \tau_j &= \sum_{k=0}^N \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N} \prod_{i=1}^k \omega^{j_i \alpha_{j_i}} X(\theta_{j_i}, x, t) \prod_{1 \leq i < i' \leq k} X_{\alpha_{j_i} \alpha_{j_{i'}}}(\theta_{j_i} - \theta_{j_{i'}}) \end{aligned} \quad (7.116)$$

ahol

$$\begin{aligned} \omega &= \exp(2\pi i/3) , \quad X(\theta, x, t) = \exp(\mu(x \cosh \theta - t \sinh \theta)) \\ X_{11}(\theta) &= X_{22}(\theta) = \frac{\cosh \theta - 1}{\cosh \theta + 1/2} , \quad X_{12}(\theta) = X_{21}(\theta) = \frac{\cosh \theta - 1/2}{\cosh \theta + 1} \end{aligned}$$

¹⁶ A transzfer mátrixok sajátértékeit részben numerikusan, részben pedig a Lidskii–Vishik–Lyusternik-féle általánosított perturbációs számítást [Lid66, MBO97] használva vizsgáltuk.

$m = \sqrt{3}\mu$, és a megoldás $3N$ paramétertől függ (a_i, θ_i, p_i) , ahol $a_i \in \{1, 2\}$, $\theta_i \in \mathbb{C}$ és $p_i \in \mathbb{C}^*$; a megoldás teljes energiája és impulzusa pedig

$$E = M \sum_i \cosh \theta_i \quad , \quad P = M \sum_i \sinh \theta_i \quad , \quad (7.117)$$

ahol $M = 8m/\beta^2$. Az egy-szoliton megoldások alakja

$$\tau_j = 1 + \omega^{aj} p X(\theta, x, t)$$

Ha bármelyik τ_j eltűnik, a megoldás szinguláris: ez csak akkor teljesülhet, ha $p^3 = -1$. Ez a feltétel a komplex p síkot három olyan tartományra osztja, ahol a megoldás értelmes, és a függvény részletes analízisével belátható, hogy $a = 1$ esetén ez a három megoldás a **3**, $a = 2$ esetén pedig a **$\bar{3}$** multipllettnak megfelelő topológiai töltéseket adja.

Az N -szoliton megoldások aszimptotikus időkre mindig egyszoliton megoldások kombinációi lesznek. Amennyiben az összes θ_i valós, akkor ezek szórási állapotokat írnak le, és könnyen belátható, hogy az X_{11} , X_{22} , X_{12} és X_{21} függvények éppen a szóráskor fellépő időkésést adják meg. Két szoliton esetén

$$\exp(m \sinh \theta_1 \Delta t_1) = X_{a_1, a_2}(\theta_{12}) \quad , \quad \exp(m \sinh \theta_2 \Delta t_2) = X_{a_1, a_2}(\theta_{12})^{-1}$$

több szoliton szórásakor pedig a folyamatot kétrészecske szórásokra bontva, az időkéséseket páronként összegezve kapjuk a teljes időkésést, ami a C.1.1 alatt leírt S mátrix faktorizáció klasszikus megfelelője.

Olyan megoldások, amelyben két szoliton rapiditása egymásnak komplex konjugáltja

$$\theta_1 = \theta_2^* = \theta + i\alpha$$

egy $2M \cos \alpha$ tömegű θ rapiditású lélegzőt írnak le. Könnyen kiszámíthatjuk egy olyan lélegző időkésését egy szolitonon, ami a legalacsonyabb B_1 kvantumállapot klasszikus határesetre: ehhez $\alpha = \pi/2 - \epsilon$ paramétert kell tekinteni, és a végén az $\epsilon \rightarrow 0$ határesetet venni¹⁷. Az eredmény [TW02]

$$\Delta T_{\text{classical}}(E) = \frac{\cosh \theta}{m \sinh \theta} \left(\frac{1}{i \sinh \theta - 1} - \frac{1}{i \sinh \theta + 1/2} \right)$$

Meglepő módon az időkésés komplexnek adódik (!), és további analízis azt mutatja, hogy ez összefügg a lélegző megoldások Khastgir és Sasaki által talált [KS96] szinguláris viselkedésével.

Faddeev és Korepin szolitonok szemiklasszikus kvantálásával foglalkozó művéből tudjuk [FK78], hogy a kvantumos fázistolásból az időkésés a következőképpen számolható. A lélegző tömege a klasszikus határesetben jóval kisebb a szolitonénál, így a probléma a lélegző szempontjából a szoliton által megadott sztatikus potenciálon történő szórás. Elemi kvantummechanikából ismert, hogy a $\Delta T(E)$ időkésés a $\delta(E)$ fázistolással a következőképpen fejezhető ki:

$$\Delta T(E) = \frac{d\delta(E)}{dE} = \frac{1}{m \sinh \theta} \frac{d}{d\theta} (-i \log S_{AB}(\theta))$$

A klasszikus határeset megfelelője $\beta \rightarrow 0$, S_{AB} pedig a (7.111) lélegző-szoliton amplitúdó. Ennek eredménye

$$\Delta T_{\text{limit}}(E) = \frac{\cosh \theta}{m \sinh \theta} \left(\frac{1}{i \sinh \theta - 1} - \frac{1}{i \sinh \theta + 1/2} \right) \quad (7.118)$$

ami tökéletesen egyezik a klasszikus megoldásból számolt időkéséssel.

Vagyis összegezve: a klasszikus lélegző megoldások patológus viselkedése teljes egészében megfeleltethető annak, hogy a kvantumos S mátrixra nemunitér eredmény adódik.

¹⁷ A klasszikus határesetben az első lélegző tömege éppen a klasszikus m paraméterhez tart, de $m/M \propto \beta^2$ így $\beta \rightarrow 0$ -ra a tömegarány eltűnik.

Az $a_2^{(2)}$ klasszikus megoldásainak kérdése nem ennyire tiszta eset, mivel a szoliton triplett három tagja közül a semleges szolitonnak megfelelő megoldás nem ismert. Jelenleg a probléma nyitott, bár a Beggs és Johnson által javasolt új módszer esetleg választ tud adni [BJ97, BJ98]. Ennek ellenére Watts-szal együtt kiszámoltuk a töltött szolitonokat, illetve lélegzőket tartalmazó szórásokat, és semmilyen problémát nem találtunk: valamennyi időkésés valós volt, és megegyezett a kvantumos amplitúdók klasszikus határesetével.

7.4.4. Perturbált konform térelméletek

7.4.4.1. $\mathcal{M}_{r,s} + \Phi_{1,3}$

Az $a_1^{(1)}$ (sine-Gordon) modell esetén, mivel az eredeti modell és minden hajtogatott verziója unitér, a spektrum valós, így a redukció és a hajtogatott modell közötti, alatt megfogalmazott reláció alapján minden $\mathcal{M}_{r,s} + \Phi_{1,3}$ perturbált minimálmodell spektruma valós, függetlenül attól, hogy $\mathcal{M}_{r,s}$ unitér-e vagy sem¹⁸. Képletesen kifejezve:

$$\text{ATFT unitér} \Rightarrow \text{hajtogatott unitér} \Rightarrow \text{redukció valós} \nRightarrow \text{redukció unitér}$$

Az azonban nem igaz, hogy ezek a modellek unitérek is egyben. Bár spektrumuk része az unitér hajtogatott modell spektrumának, a skalárszorzatuk nem egyezik meg azzal, mint ezt már Reshetikhin és Smirnov észrevette [RS90]. Vegyük például a $8\pi/\beta^2 = 2/5$ esetet, amikor a redukció a skálázó Lee-Yang modellre vezet. A redukció után a szolitonok eltűnnek a spektrumból, ami egyben azt jelenti, hogy az $S_{BB}(\theta)$ lélegző S -mátrix $\theta = 2\pi i/3$ pólusát megmagyarázó Coleman-Thun [CT78] diagram sem létezik. A redukált modellben ezt a pólust a B önmagába történő fúziója magyarázza, ami viszont a reziduum „rossz” előjele miatt azt jelenti, hogy a Hilbert-téren a skalárszorzat indefinit (ld. C.1.2 alatt).

A 7.27 ábra illusztrálja a hajtogatott modell és a redukált modell transzfer mátrixai közötti korrespondenciát (a redukált modell S mátrixát ld. [RS90]). Ebben a számolásban és a további hasonló esetekben a következő egyszerűsítésekkel éltünk:

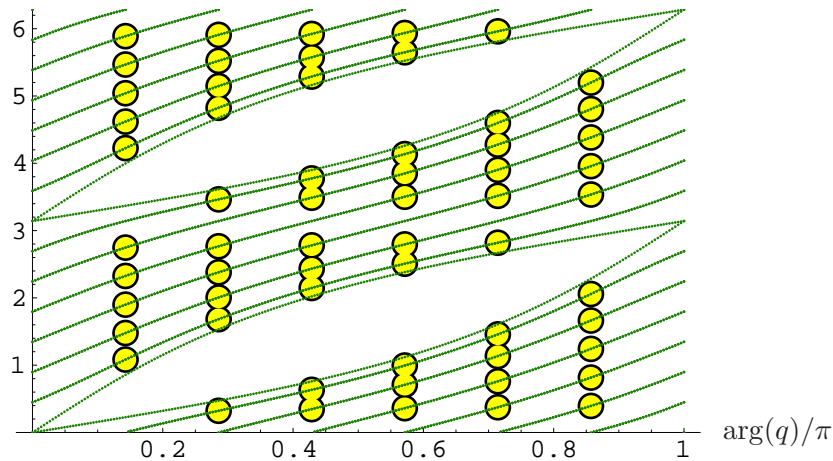
1. Elhagytuk az S -mátrixok skalár prefaktorokat (a (C.11) sine-Gordon S mátrixban ez az S_{++}^{++} amplitúdó). Ezek egyfelől fázisok, vagyis a spektrum valósságát nem befolyásolják, másrészt pedig ugyanazok az eredeti és a redukált modellben.
2. Másrészt az amplitúdó mátrix részére mindig igaz, hogy $R(x, q^*) = R(x, q)^*$ és $R(x, -1/q) = UR(x, q)U^{-1}$, ahol U egy diagonális mátrix, aminek a főátlójában mindenütt ± 1 áll. Az első reláció következtében mindig elég a $0 \leq \arg(q) \leq \pi$ esetet végigszámolni.

7.4.4.2. $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{1,2}/\Phi_{2,1}$ és $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{1,5}$: általános megjegyzések

Mind a három fenti modell osztálynál külön kell választani a $\pi/\gamma > 1$ esetet, amikor jelen vannak gerjesztett kinkok, és a $\pi/\gamma < 1$ esetet, amikor nincsenek. Mint azt az $a_2^{(2)}$ ATFT 7.4.2.2 alatti vizsgálatából tudjuk, az utóbbi esetben jóval több esélyünk van arra, hogy a spektrum valós legyen. Az S mátrix fentebb említett szimmetriái miatt elegendő a $0 \leq \arg(q) \leq \pi$ tartománnyal foglalkozni. Két esetben lehetünk biztosak abban, hogy a spektrum valós: egyfelől akkor, ha a megfelelő hajtogatott $a_2^{(2)}$ modell spektruma valós, másfelől pedig az $\mathcal{M}_{p,p\pm 1} + \Phi_{1,2}$ esetben, amikor a redukált modellről a konform térelmélet révén tudjuk, hogy unitér (a $\Phi_{1,5}$ operátor soha nem releváns egyetlen unitér minimálmodellben sem).

A hajtogatott modellek és a perturbált minimálmodellek közti kapcsolatot a 7.28 és 7.29 ábrákon a K_0 – K_0 kétrészecske transzfer mátrixszal illusztrálom (hasonló vizsgálatokat végeztünk K_0 – K_1 és K_0 – K_0 – K_0 transzfer mátrixokkal, ugyanilyen meggyőző eredménnyel). Látjuk, hogy

¹⁸ Bizonyos $\mathcal{M}_{r,s} + \Phi_{1,3}$ modellekre az S mátrix hermitikus analitikus (pl. az $s = r + 1$ unitér esetben, vagy $r = 2$ esetén), azaz ekkor a spektrum valóssága ebből is következik. A fenti érvelés azonban az általános esetben is igaz.



7.27. ábra. A $\mathcal{M}_{7,m} + \phi_{13}$ modellek és a 14-hajtogatott sine-Gordon modell kétrészecske transzfer mátrixa sajátértékeinek összehasonlítása, a függőleges tengelyen a sajátértékek fázisa látható. A hajtogatott modellt a folytonos vonalak, a diszkrét értékeknél értelmezett redukált modelleket a pöttyök ábrázolják. A két részecske relatív rapiditását $\theta = 1/9$ -nek választottuk.

vannak olyan tartományok, ahol a hajtogatott modell spektruma komplex, de az is jól látszik, hogy egyes redukciók „szerencsésen” kiprojektálják az ezeknek megfelelő állapotokat (más redukciók ellenben nem). A spektrum valóságának eldöntése tehát további részletes analízist igényel, aminek eredményeit az alábbiakban ismertetem.

7.4.4.3. $\Phi_{1,2}$ perturbációk, $\pi/\gamma > 1$

Ezen elméletekben van legalább egy K_1 gerjesztett kink, és a legerősebb megszorítást a K_0 és K_1 közti S mátrixból kapjuk.

A $p' = \pm 1 \bmod p$ „unitér típusúak”: S -mátrixaik és transzfer mátrixaik arányosak az unitér $\mathcal{M}_{p,p+1} + \Phi_{1,2}$ és $\mathcal{M}_{p,p+1} + \Phi_{2,1}$ modelléivel (a kink S mátrixok csak a (7.107) alatti S_0^{mn} fázisfaktorok értékében különböznek), ezért ezek az S -mátrixok hermitikus analitikusak, és így az ezekből felépített összes transzfer mátrix valós energiaszinteket ad.

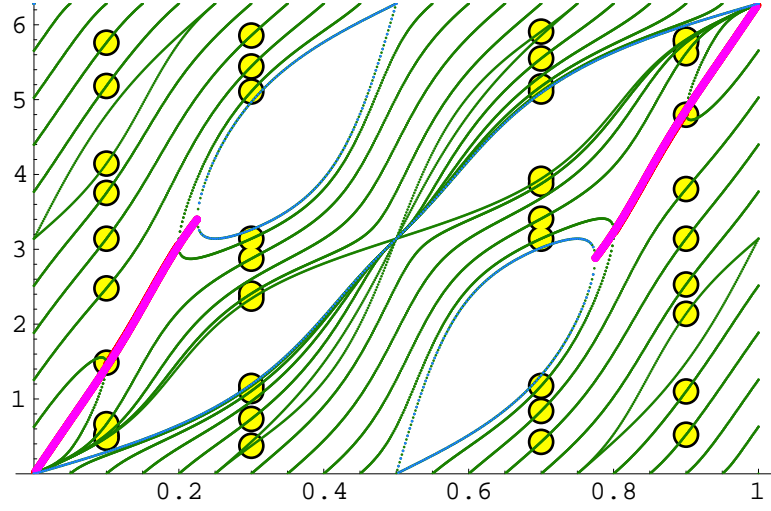
Numerikus számolások azt mutatják, hogy a transzfer mátrixok sajátértékei (a kinkek összes lehetséges két- és háromrészecske kombinációját tekintve) a $p' = (p \pm 1)/2 \bmod p$ modellekben is fázisok, de ennek semmilyen magyarázata nem ismert. Ezenkívül lehetséges, hogy a kötött állapotként előálló lélegzők valamelyikének S mátrixa (az $a_2^{(1)}$ elméletéhez hasonlóan) nem lesz fázis; erre semmilyen explicit példa nem ismert, másrészt azonban ezen modellek többségében nem ismert a bootstrap bezárása, így erről nem mondhatunk többet.

7.4.4.4. $\Phi_{1,2}$ perturbációk, $\pi/\gamma < 1$

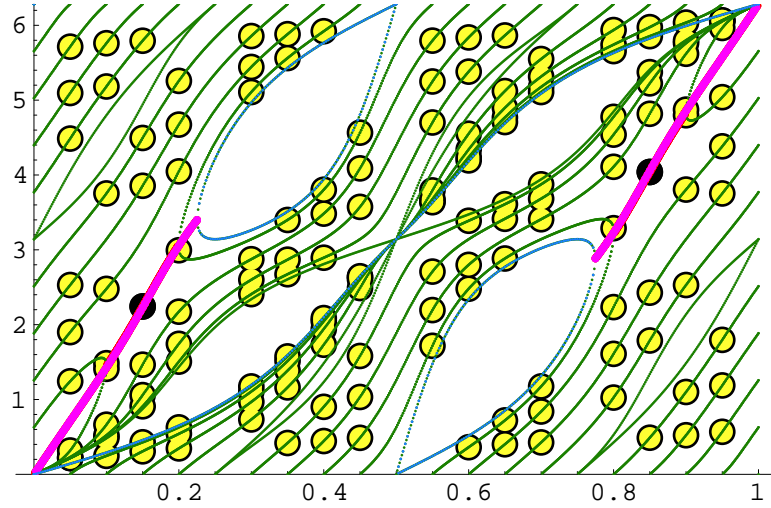
Ezeket a modelleket (mivel itt $p' < p$) konvencionálisan az $\mathcal{M}_{p,p'} + \Phi_{1,2} \equiv \mathcal{M}_{p',p} + \Phi_{2,1}$ azonosításon keresztül $\Phi_{2,1}$ perturbációként ismerik. Ezekben nincs gerjesztett kink, és lélegzőből is (csatolástól függően) legfeljebb egy, aminek összes amplitúdója fázis, vagyis a spektrum valóságának eldöntéséhez elegendő a K_0 sokrészecske transzfer mátrixok vizsgálata. Ennek eredményét a 7.30 ábra illusztrálja, ahol a hajtogatási szám 50-ig fut, és a transzfer mátrixokat 5 részecskeig bezárólag vizsgáltuk meg.

A folytonos (vörös, kék és lila) vonalak azokat a modell sorozatokat jelölik, amikről az alábbiakban a 3. pont alatt lesz szó, a szaggatott zöld vonalak azok a modellek, amelyek alapállapotaira ismert a megfelelő TBA egyenlet (ld. az alábbiakban).

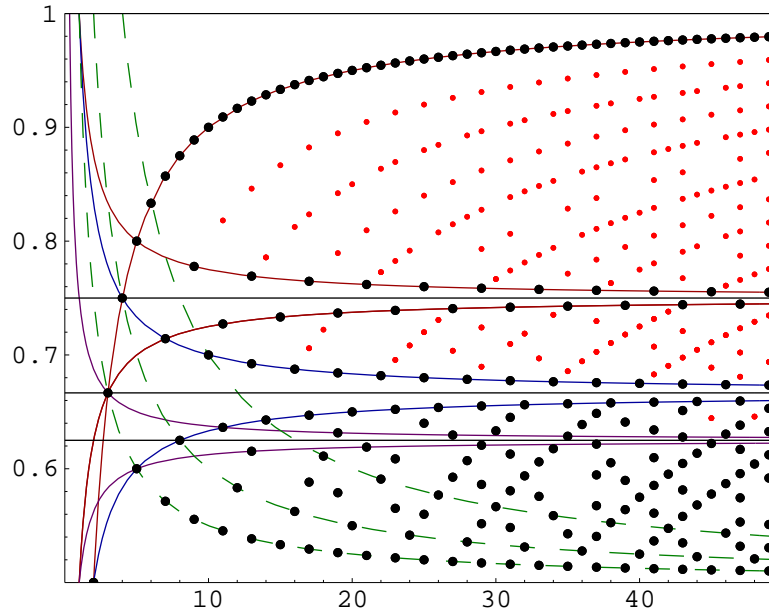
Egy elég bonyolult mintázat látszik kialakulni: egyre magasabb transzfer mátrixokat figye-



7.28. ábra. Az $\mathcal{M}_{10,m} + \Phi_{1,2}$ minimálmodellek és a 10-hajtogatott $a_2^{(2)}$ ATFT K_0 - K_0 transzfermátrixainak összehasonlítása $\theta = 5$ relatív rapiditás mellett. A vízszintes tengelyen $\arg(q)/\pi$ látható, a függőleges tengelyen a sajátértékek fázisszöge. A hajtogatott modell fázis sajátértékeket vékony zöld, a nem-fázis sajátértékeket vastag rózsaszín vonal ábrázolja, a redukált modellek sajátértékeit pedig a sárga pöttyök. Ebben a speciális esetben a redukált modellek valamennyi transzfermátrix sajátértéke fázis.



7.29. ábra. Az $\mathcal{M}_{5,m} + \Phi_{1,5}$ minimálmodellek és a 10-hajtogatott $a_2^{(2)}$ ATFT K_0 - K_0 transzfermátrixainak összehasonlítása $\theta = 5$ relatív rapiditás mellett. A grafikon jelölései hasonlóak a 7.28 ábrához, azonban most vannak olyan sajátértékei a redukált modellek transzfermátrixának, amelyek nem fázisok: ezeket fekete pötty mutatja.



7.30. ábra. Numerikus eredmények a K_0 transzfer mátrixokra az $\mathcal{M}_{rs} + \Phi_{1,2}$ modellekben. A fekete pontok azokat a modelleket mutatják, amelyek spektruma 5 részecskéig bezárólag valós, a piros pontok azokat, amelyeké komplex, a függőleges tengely koordinátája $\pi/\gamma = s/r$, a vízszintesen az r (ami a hajtogatási számmal megegyezik) látható. A vízszintes vonalak a (7.112) értékek közül az $n = 1, 2, 3, 4$ eseteket mutatják.

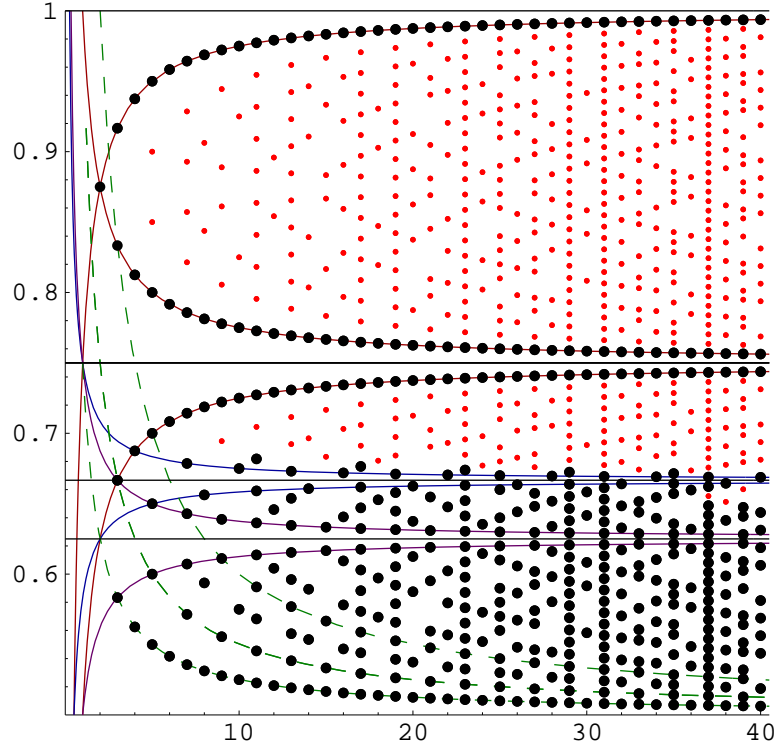
lembe véve újabb és újabb modellek bizonyulnak komplexnek. Mivel csak 5 részecskéig mentünk el, ezért csak sejtéseket tehetünk, de a kialakuló mintázat ezekkel teljesen összhangban van:

1. Világos, hogy minden olyan γ csatolás, amelyre a hajtogatott modell spektruma valós, arra a redukált modellé is az, ezek (7.112) alapján az $\mathcal{M}_{2m+1,4m} + \Phi_{2,1}$ és $\mathcal{M}_{m+1,2m+1} + \Phi_{2,1}$ modellek.
2. Az $\mathcal{M}_{p,p+1} + \Phi_{2,1}$ unitér minimálmodellek spektruma természetesen valós.
3. Úgy tűnik, hogy azon modellek sorozatai is valósak, amelyek mentén $\arg(q)/\pi$ a (7.112) alatti speciális értékek valamelyikéhez tart úgy, hogy adott hajtogatási számnál a megengedett racionális csatolások közül a lehető legközelebb esik hozzá. Az unitér modellek is ilyenek, itt a határesetben előálló speciális érték $\pi/\gamma = 1$, ami a (7.112) szerint az első valós $a_2^{(2)}$ modell ($n = 1$).

A következő példák: a $\mathcal{M}_{4k\pm 1,3k\pm 1} + \Phi_{1,2}$ sorozat, ami a $\arg(q)/\pi = 3/4$ -hoz tart, $\mathcal{M}_{3k\pm 1,2k\pm 1} + \Phi_{1,2}$ az $\arg(q)/\pi = 2/3$, $\mathcal{M}_{8k\pm 3,5k\pm 2} + \Phi_{1,2}$ pedig az $\arg(q)/\pi = 5/8$ értéknek felel meg, és így tovább. Az első három pár ilyen sorozatot a 7.30 ábrán folytonos vonal jelöli.

Némelyik modellt már korábban is vizsgálták. Ilyen például az $\mathcal{M}_{3,5} + \Phi_{2,1}$, amiről Mussardo vette észre, hogy spektruma valós, annak ellenére, hogy az S mátrixa szemmel láthatóan nem unitér [Mus92a].

Három másik sorozat esetén ismert az alapállapotot leíró TBA egyenlet, aminek alapján a vákuum energiája véges térfogatban valós, ezek a következők: $\mathcal{M}_{m+1,2m+1} + \Phi_{2,1}$ [RST96, Mar92, Mar93], $\mathcal{M}_{2m+1,4m} + \Phi_{2,1}$ [Mel94], és $\mathcal{M}_{2m+1,4m-2} + \Phi_{2,1}$ [DDT00]; a 7.30 ábrán ezeket a szaggatott zöld vonal jelöli. Azonban a vákuumállapot valós volta nem garantálja a gerjesztett állapotokét, erre példa az általunk korábban vizsgált esetben az ún. II típusba sorolt modellpárok esete [KTW97], ahol egy komplex spektrummal rendelkező nemunitér rendszer alapállapotát leíró TBA egy az egyben azonos egy unitér modellével.



7.31. ábra. Numerikus eredmények a K_0 transzfer mátrixokra az $\mathcal{M}_{rs} + \Phi_{1,5}$ modellekben. A fekete pontok azokat a modelleket mutatják, amelyek spektruma 5 részecskéig bezárólag valós, a piros pontok azokat, amelyeké komplex, a függőleges tengely koordinátája $\pi/\gamma=4s/r$, a vízszintesen az r (ami a hajtogatósi szám fele) látható. A vízszintes vonalak a (7.112) értékek közül az $n = 1, 2, 3, 4$ eseteket mutatják.

7.4.4.5. $\Phi_{1,5}$ perturbációk, $\pi/\gamma > 1$

Itt is van legalább egy gerjesztett kink, és numerikus vizsgálatok azt mutatják, hogy két sorozat lehet valós: $p' = 2p \pm 1 \bmod 4p$ ahol az S mátrix hermitikus analitikus, ami garantálja a spektrum valósságát, és a $p' = \pm 1 \bmod 4p$ sorozat, amelynek esetén a valós spektrum oka nem világos. Jegyezzük meg, hogy ezek mind nemunitér kvantumtérelméletek, mivel a konform térelméletből örökölt skaláris szorzat indefinit.

7.4.4.6. $\Phi_{1,5}$ perturbációk, $\pi/\gamma < 1$

Ekkor (a $\Phi_{1,2}$ esethez hasonlóan) csak a K_0 transzfer mátrixok vizsgálata szükséges. Ezt 4 részecskéig tettük meg (a mátrixok mérete a részecskék számával itt jóval gyorsabban nő). Itt a $\Phi_{1,2}$ eseténél még bonyolultabb mintázatot találtunk, amit nem is sikerült teljes egészében szabályokba foglalnunk.

1. Az $|\arg(q)/\pi| = (1 \pm 1/n)/2$ modellek itt is valósak, ezekből az $\mathcal{M}_{p,2p+1} + \Phi_{1,5}$ és $\mathcal{M}_{2p+1,4p+4} + \Phi_{1,5}$ sorozatok adódnak.
2. Itt is úgy tűnik, hogy más végtelen sorozatok is vannak, az első példák $\mathcal{M}_{k,4k-1} + \Phi_{1,5}$, ami $\arg(q)/\pi = 1$ felé tart és $\mathcal{M}_{k,3k+1} + \Phi_{1,5}$, ami $\arg(q)/\pi = 3/4$ -hoz tart.

A következő szinten azonban, meglepő módon, 4 sorozatot találtunk. Mindegyik $\arg(q)/\pi = 2/3$ -hoz tart, de a határvonalhoz legközelebbi modelleket tömörítő $\mathcal{M}_{3k \pm 1, 8k \pm 3} + \Phi_{1,5}$ sorozaton túl az $\mathcal{M}_{6k \pm 1, 16k \pm 2} + \Phi_{1,5}$ sorozat is valósnak tűnik. Az utóbbi sorozat esetén, mivel ez új jelenség, leellenőriztük az 5 részecske transzfer mátrixokat is, és azok sajátértékei is mind fázisnak bizonyultak.

A zöld szaggatott vonalak ismét olyan sorozatokat jeleznek, ahol TBA egyenletből tudjuk, hogy az alapállapot energiája valós [DDT00], ám az előzőekben tett megjegyzéseinknek megfelelően ez semmit nem jelent a gerjesztett állapotok valóságát tekintve. Egy konkrét példát ($\mathcal{M}_{3,14} + \Phi_{1,5}$) korábban már vizsgáltunk [KTW97], és éppen ebben az esetben láttuk az első olyan elméletet, amelynek vákuumállapota valós, ám gerjesztett spektrumát mind a TCSA analízis, mint a Bethe-Yang egyenletek komplexnek mutatta, ráadásul a két módszer által adott adatok (az elvárható pontosságon belül) teljességgel megegyeztek egymással.

7.4.5. Következtetések

Láttuk, hogy ezen modellek spektruma (leszámítva természetesen a sine-Gordon modellt) szinte mindig komplex, kivéve esetleg a csatolási állandó diszkrét értékeit. Klasszikus szinten ennek azonban nem mindig van jele.

Az $a_2^{(1)}$ esetben (a kvantumos S mátrixszal összhangban) a lélegző-szolon időkésés mindig komplex, itt tehát klasszikus szinten is jól látszik az elmélet „patologikus mivolta”. Megjegyezzük, hogy itt is vannak unitér redukált modellek: a

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{m}{m+1}$$

csatolási állandóknál az ún. W_3 minimálmodellek unitér sorozatának integrálható perturbációját kaphatjuk meg [dVF91]. Ebben az esetben a lélegzők egyszerűen nincsenek a spektrumban, és a redukció éppen kiprojektálja a szolon transzfer mátrixok nem fázis sajátértékeit. $\beta^2/(4\pi) < 3/4$ esetén a lélegzők jelen vannak, ám $q^3 = \pm 1$ esetén a redukció teljesen kiprojektálja a szolonokat így elvileg a W_3 algebra megfelelő minimálmodelljeinek a spektruma esetleg valós lehet. Azonban tudjuk, hogy az egyik modell ebben a sorozatban azonos az $\mathcal{M}_{3,14} + \Phi_{1,5}$ perturbált Virasoro minimálmodellel, amelynek spektrumáról már korábbi vizsgálataink során láttuk, hogy komplex. Ennek oka, hogy a lélegzők bootstrap-jének bezárásakor generálódnak olyan skalár részecskék, amelyeknek S mátrixa nem fázis [Tak97a, KTW97].

Úgy tűnik, hogy a lélegző-szolon S mátrixok patologikus viselkedése azon múlik, hogy vannak nem önkonjugált multiplettek, és ez minden esetben tükröződik is a megfelelő klasszikus időkésések komplex voltában. Erre példa az $a_2^{(1)}$ elmélet, ahol a két szolon triplett egymás konjugáltja, és a lélegzők sem önkonjugáltak. (A klasszikus szolon-szolon szórás ezzel szemben minden esetben valós időkésésekkel írható le). Az $a_2^{(2)}$ elméletben a töltéskonjugálás a triplettet önmagára képezi, és a lélegzők is önkonjugáltak: ebben az esetben valóban nem is láttunk a klasszikus esetben komplex időkéséseket. Gendenberger és MacKay megmutatták [GM97a], hogy a klasszikus megoldásokat felépítő $X_{ab}(k)$ transzmissziós együtthatók és az a típusú szolon b típusú lélegzőn való szórásának S_{ab} kvantumos amplitúdója között a következő szoros kapcsolat van, mégpedig

$$X_{ab}(m_a \sinh(\theta)) = \lim_{\beta \rightarrow 0} S_{ab}(\theta)$$

ahol m_a a lélegző tömege. Ez könnyen ellenőrizhető az $a_2^{(1)}$ modellre. Az $a_n^{(1)}$ esetben a transzmissziós együtthatók [Hol93b]

$$X_{ab}(k) = \frac{ik - m_a \cos((a-b)\pi/(n+1))}{ik - m_a \cos((a+b)\pi/(n+1))} \quad , \quad m_a = 2m \cos(a\pi/(n+1)) \quad (7.119)$$

és $a_2^{(1)}$ esetén valóban

$$X_{11}(k) = \frac{\sinh \theta - i}{\sinh \theta - i/2} = \lim_{\beta \rightarrow 0} S_{AB_1}(\theta)$$

Az összes ATFT transzmissziós együtthatói ismertek [OTU93b, KO96], és ezek pontosan akkor nem fázisok, ha mindkét index (a és b) nem önkonjugált multiplетt-hez tartozik: ilyen részecs-

kék az $a_n^{(1)}$, $d_{2n+1}^{(1)}$ és $e_6^{(1)}$ modellekben fordulnak elő¹⁹. Mivel ez a tulajdonság öröklődik a szoliton-lélegző S mátrixokra, azt várjuk, hogy ezen elméleteknek nincs olyan konzisztens unitér redukciója, amelyikben a szolitonok és a lélegzők egyaránt a spektrum részei maradnak.

Az affin Toda elméleteket kutatók között régóta ismert probléma (ld. pl. [Cor94]), hogy mennyiben értelmesek ezek a modellek imaginárius csatolás mellett (ahol a sine-Gordon modell természetes kiterjesztését adnák magasabb szimmetriacsoportok alatt transzformálódó szoliton multiplettekre). A kételyeket az is táplálta, hogy a legegyszerűbb (7.4.3 alatt röviden ismertetett) Ansatzzal megkapható megoldások általában nem töltik ki a kvantum S mátrixban feltételezett szoliton multipletteket [McG94] (ennek egy példája volt az $a_2^{(2)}$ szoliton tripléttjének semleges tagja). Hasonló problémákkal szembesülünk lélegző megoldások esetén; azonban megfelelően általánosított Ansatz segítségével Beggs és Johnson sokat megtalált ezen hiányzó klasszikus megoldások közül [BJ97, BJ98], és ennek alapján elképzelhető, hogy valójában az összes szükséges megoldás létezik.

Bár a hatás komplex, felmerült többször is az a kérdés, hogy lehetséges-e valamiféle konzisztens redukciót adni – klasszikus esetben a megoldások valamely osztályát kiválasztva, kvantum esetben Reshetikhin és Smirnov munkáját általánosítva [RS90]. Ezt az is erősítette, hogy 1997-ban publikált munkánkig [KTW97] senki nem talált olyan elméletet, amelyben a spektrum ne lett volna valós, és az ismert klasszikus megoldások is teljesen konzisztensnek tűntek. Eredményeinkben az volt igazán meglepő, hogy annak ellenére, hogy az $\mathcal{M}_{3,14} + \Phi_{1,5}$ minimálmodell spektrumát a TCSA adatok egyértelműen komplexnek mutatják, mégis nagyszerűen egyezik a nemunitér S mátrixokból a Bethe-Yang egyenletekkel számolt jóslatokkal, a Hamilton operátor komplex sajátértékeit is beleértve. Hasonlóképpen, mint fentebb láttuk az $a_2^{(1)}$ elmélet „patologikus” szoliton-lélegző S mátrixai is teljes mértékben konzisztensek a (komplex) klasszikus időkésekkel, még akkor is, ha megfelelő klasszikus megoldás esetleg szinguláris.

Ennek alapján úgy vélem, hogy az integrálható struktúra és a kvantumcsoport S mátrixok akkor is érvényben maradnak, amikor a spektrum nem valós, és a formális S mátrix leírás teljes mértékben működőképes. Másrészt azonban a fentiek alapján úgy tűnik, hogy konzisztens unitér (vagy legalább valós spektrummal rendelkező) redukciót találni csak a paraméterek nagyon speciális értékei mellett lehet.

Érdekes nyitott probléma az ATFT-k szemiklasszikus kvantálása: ez választ adhatna arra, hogy a korrespondencia a kvantumos S mátrixokkal fennáll-e a kvantumkorrekciók figyelembe vétele után is (a fentiekben mindig csak a szigorú klasszikus határesetet vizsgáltuk meg). Mint már utaltam rá, a meglévő próbálkozások [Hol93b, DG95, MW95] közül az utóbbi kettőnek az eredményei ellentmondanak egymásnak; ennek oka az, hogy nem tisztázott, pontosan milyen valósági feltételt kell a klasszikus megoldásokon kiróni, hogy az ennek alapján a klasszikus megoldás körüli kis rezgésekre kapott bázis alapul szolgáljon a Dashen, Hasslacher és Neveu módszerén [DHN74, DHN75a] alapuló számításoknak (ez egyébként Hollowoodnál [Hol93b] sincs tisztázva, dacára annak, hogy az tömegkorrekcióra kapott eredményei helytállónak tűnnek). Mint fentebb említettem, az sem világos, a klasszikus megoldások (vagy általánosabban a konfigurációk) mely halmaza tekinthető konzisztens kiindulópontnak.

A redukált modelleket tekintve itt most nem bocsátkozom részletes fejtegetésekbe, mivel valamennyi lényeges következtetés megtalálható 7.4.4 alatt. Az alapvető nyitott kérdés az, hogy a hajtogatott modellből a redukáltra történő projekciót explicite megadjuk; amennyiben ez sikerülne (pl. a kvantumcsoport szimmetria megfelelő módosításával, ami periodikus határfeltételek esetén is működik), a spektrum valós volta sokkal könnyebben lenne vizsgálható, mivel ehhez csak a hajtogatott modell spektrumának ismerete kell. Ez utóbbihoz pedig a Dorey és Tateo által az $a_2^{(2)}$ modell alapállapotára felírt DdV egyenlet [DT00] teljes spektrumra való kiterjesztése vezethet el. Érdekes kérdés továbbá a bootstrap bezárása ezekben a modellekben; a legegyszerűbb

¹⁹ Az affin Toda elméletekben minden részecske a megfelelő Lie-algebra ún. fundamentális ábrázolásaihoz rendelhető; a kvantumos szolitonok pontosan az adott ábrázolásban transzformálódnak, és a konjugáció pontosan megfelel az ábrázolás kontragradiensének.

olyan példa, amelyben ez mind a mai napig nem történt meg, az $\mathcal{M}_{3,5} + \Phi_{1,2}$ modell (többen, köztük jómagam is, sikertelenül próbálkoztunk, még a TCSA spektrum részletes analízisével sem tudtam előbbre jutni).

8. Nyílt határfeltételek (peremes kvantumtérelméletek)

Az eddigi vizsgálatok kiterjesztéseként most olyan modellekkel foglalkozom, amelyekben valódi, térben lokalizált határfeltétel (perem) van jelen. Elsőként a végesméret effektusok leírására alkalmas módszereket, a peremes Bethe-Yang egyenleteket, valamint a termodinamikai Bethe Ansatz és a TCSA peremes kiterjesztését veszem sorra. Ezután alapvető példaként megadom a peremes sine-Gordon modell véges térfogatbeli spektrumának TCSA segítségével történő elemzését, amivel számos olyan eredmény ellenőrizhető, amelyek az egzakt reflexiós faktorok elméletéből származnak. Ilyenek pl. a Ghoshal és A. B. Zamolodchikov által származtatott (C.30,C.31) egzakt reflexiós faktorok [GZ94, Gho94], az A. B. Zamolodchikov által meghatározott (C.33) összefüggés a Lagrange-i paraméterek és az egzakt reflexiós faktorok paraméterei között [Zam99], valamint a (C.34) peremes energiajárulék, továbbá a Dorey és Mattsson által Dirichlet határfeltételek esetére megsejtett peremes gerjesztett állapot spektrum [MD00], amit Bajnok Zoltánnal, Palla Lászlóval és Tóth Gábor Zsoltal általánosítottunk tetszőleges integrálható határfeltételekre [BPTT02].

Közbevetőleg röviden ismertetem a peremes kvantumtérelmélet néhány alapvető fogalmát, amelyek tisztázása Bajnok Zoltánnal, Böhm Gabriellával és Palla Lászlóval végzett közös munka eredménye [BBT02, BBT04, BPT06a], és tetszőleges téridő dimenzió esetén érvényes.

Ezután [BPT05b] alapján rátérek a véges térfogatbeli spektrum szemiklasszikus elemzésére, aminek egyik haszna, hogy nagyon konkrét és explicit képet alkothatunk a peremes kvantumtérelmélet jellemző állapotairól, valamint fontos kiindulópont lesz a végesméret effektusok további elemzésében. Valójában az ennek során származtatott eredmények alapján sejtettük meg az ezt követően ismertett peremes Lüscher formulát, amit az ún. klaszter sorfejtéssel vezettünk le, és számos ellenőrzésnek vetettünk alá [BPT05a]. Ennek kapcsán vetődött fel az egyrészes csatolás kérdése, a tárgyalást az erre vonatkozó eredmények ismertetésével folytatom [BPT05a, BPT06a]. A sort egy olyan alkalmazással zárom, ami ismét kilép az $1 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletek világából: a Casimir effektus egy olyan újszerű származtatását mutatom be, amely az eddigiek során szokásos módszerekhez képest teljesen más kiindulópontból, a kis energiákon érvényes fizikai leírás felől közelít, ennek következtében automatikusan véges, renormálást nem igényel, és tetszőlegesen kölcsönható elméletben képes megadni a Casimir erő nagy távolságokra érvényes sorfejtését [BPT06b, BPT06a].

8.1. Végesméret effektusok perem jelenlétében

8.1.1. Peremes Bethe-Yang egyenletek

A Bethe-Yang egyenletek peremes kiterjesztését nemdiagonális szórás esetére Ahn és Nepomechie adta meg [AN00] (diagonális szórásra korábban Fendley és Saleur már felírták [FS94]). Mivel a gondolatmenet nagyon hasonló az 5.1.1 alattihoz, ezért most kevésbé részletezem, és tömörebb jelölésmódot használlok ([BPT01] alapján).

Tekintsünk N részecskét egy véges L hosszúságú intervallumon. Legyen az A_i részecske tömege m_i , rapiditása θ_i (amiről feltehetjük, hogy pozitív, mivel a peremen történő reflexió esetén az impulzus előjelet vált, ezért csak a rapiditás abszolút értéke számít), valamint legyenek a belső kvantumszámok α_i (amelyek megkülönböztetik az m_i tömegű multiplett többi tagjától).

Az A_i részecske reflexiós faktorait a bal/jobb peremen jelölje $R_L^{(i)}(\theta_i)$ illetve $R_R^{(i)}(\theta_i)$, az A_i és A_j kétrészecske szórás mátrixát pedig $S^{(i,j)}(\theta_i - \theta_j)$. Nemdiagonális szórás esetén ezek a következő alakú mátrixok:

$$\begin{aligned} R_L^{(i)}(\theta_i) &= \left\{ R_L^{(i)}(\theta_i)_{\alpha_i}^{\alpha'_i} \right\} \\ R_R^{(i)}(\theta_i) &= \left\{ R_R^{(i)}(\theta_i)_{\alpha_i}^{\alpha'_i} \right\} \\ S^{(i,j)}(\theta_i - \theta_j) &= \left\{ S^{(i,j)}(\theta_i - \theta_j)_{\alpha_i \alpha_j}^{\alpha'_i \alpha'_j} \right\} \end{aligned}$$

Egy olyan transzfer mátrix családot vezetünk be, amely a $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ téren hat, ahol V_i az a belső tér, aminek bázisán az A_i részecske α_i multipliett indexe végigfut. A T_k transzfer mátrix a hullámfüggvény egy unitér transzformációját írja le, amely annak a monodrómia műveletnek felel meg, hogy az A_k részecskét elvisszük a bal peremig (miközben szóródik az útjába eső több részecskén), azon visszaverődik, eljut a jobb peremig, amin ismét visszaverődik és aztán eredeti helyére tér vissza. Az eredmény nem függ a visszaverődések és kétrészecske szórások részletes sorrendjétől (ezt a (C.5) és (C.28) faktorizációs egyenletek garantálják), és a következő alakba írható:

$$T_k^{(1,\dots,N)}(\theta_1, \dots, \theta_N) = R_R^{(k)}(\theta_k) \prod_{j:j \neq k} S^{(j,k)}(\theta_k + \theta_j) R_L^{(k)}(\theta_k) \prod_{j:j \neq k} S^{(j,k)}(\theta_k - \theta_j)$$

ahol a multipliett indexeket expliciten nem írtuk ki (az amplitúdókon feltüntetett felső indexek alapján könnyen helyreállíthatók).

A faktorizáció egy másik következménye, hogy a T_k mátrixok egymással felcserélnek. Az állapot hullámfüggvénye egy olyan $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}$ vektorral jellemezhető, ami a $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ tér egy eleme (és függ a részecskék rapiditásától). Ennek a hullámfüggvénynek a következő egyenletnek kell eleget tennie:

$$\exp(2im_k L \sinh(\theta_k)) T_k^{(1,\dots,N)}(\theta_1, \dots, \theta_N) \psi = \psi \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad (8.1)$$

A transzfer mátrixot szorzó faktort az A_k részecskének megfelelő síkhullám komponens eredményezi. A (8.1) egyenleteket peremes Bethe-Yang egyenleteknek nevezzük. (Itt most nem tüntettem fel az η statisztikus fázisokat, amelyek standard bozonok/fermionok esetén – mivel mindig párban fordulnak elő – amúgy is kiesnek).

Jelölje a $T_k^{(1,\dots,N)}(\theta_1, \dots, \theta_N)$ transzfer mátrixok sajátértékeit $\lambda_k^{(s)}(\theta_1, \dots, \theta_N)$, ahol $s = 1, \dots, D_N$ és $D_N = \dim V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, a megfelelő közös sajátvektoraikat pedig $\psi^{(s)}(\theta_1, \dots, \theta_N)$. A (8.1) Bethe-Yang egyenletek megoldását a

$$\psi = \psi^{(s)}(\theta_1, \dots, \theta_N)$$

amplitúdók adják, feltéve, hogy a rapiditások megoldják a

$$\exp(2im_k L \sinh(\theta_k)) \lambda_k^{(s)}(\theta_1, \dots, \theta_N) = 1 \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad (8.2)$$

(rögzített s mellett). Ezek az egyenletek lényegében a véges térfogatbeli impulzus kvantálási feltételeket adják meg peremes esetben. A részecskék teljes energiája pedig

$$E = \sum_{j=1}^N m_j \cosh \theta_j$$

A periodikus határfeltétel esetén érvényes (5.3) egyenletekhez hasonlóan, ez a megközelítés is csak az $1/L$ -ben analitikus végesméret korrekciókat adja meg, azaz csak akkor érvényes, ha $m_k L \gg 1$

minden k -ra. Ha a részecskéknek nincsenek multiplicitás indexei, a transzfer mátrixok skalárok és közvetlenül behelyettesíthetők (8.2)-be.

A periodikus esethez hasonlóan a (8.2) logaritmusát véve

$$2m_k L \sinh(\theta_k) - i \log \lambda_k^{(s)}(\theta_1, \dots, \theta_N) = 2\pi I_k \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad (8.3)$$

ahol $I_k \in \mathbb{Z}$ az ún. Bethe kvantumszámok. Ilyen módon egy sokrészecske állapotot a sajátvektor s indexével és az I_1, \dots, I_N kvantumszámokkal jelölhetünk meg, általában egyértelmű módon, feltéve, hogy a logaritmus ágát konzisztensen választjuk meg.

8.1.2. Peremes kötött állapotok leírása véges térfogatban

Egy M tömegű skalár részecske esetén (8.3) a következő alakot ölti:

$$2ML \sinh(\theta) - i \log R_L(\theta) - i \log R_R(\theta) = 2\pi I \quad (8.4)$$

A vákuum állapothoz képest az állapot energiája a következő alakba írható:

$$E(L) - E_0(L) = E_R + E_L + M \cosh \theta$$

ahol $E_{R,L}$ a jobb/bal perem energiája (mivel a perem is lehet gerjesztett állapotban). Kis térfogatban ($ML \ll 1$) az (8.4) egyenletnek mindig van valós megoldása, de ML nagyobb értékeire ez nem mindig igaz. Legyen $I = 0$ és

$$\rho_{L,R} = i \frac{\partial}{\partial \theta} \log R_{L,R}(\theta) \Big|_{\theta=0}$$

A reflexiós faktorok általános tulajdonsága, hogy $i \log R_{L,R}(\theta)$ határértékei végesek, ha $\theta \rightarrow \pm\infty$; (C.24) következtében pedig páratlan függvényei θ -nak. Ezért a

$$2ML \sinh(\theta) = i \log R_L(\theta) + i \log R_R(\theta) \quad (8.5)$$

egyenletnek mindig van két, egymással ellentett előjelű, nemzérus megoldása, ha

$$2ML < \rho_L + \rho_R$$

Ha L eléri az

$$L_0 = \frac{1}{2M} (\rho_L + \rho_R)$$

értéket, akkor a megoldások az origóban találkoznak.

Mi történik ezután? Ha $ML_0 \gg 1$, a Bethe-Yang leírás a spektrum egy jó közelítése kell legyen. De az energiaszintek nem tűnhetnek csak úgy el, mivel minden L -nek egy folytonos függvénye. Ha a TCSA módszerre gondolunk, az energiaszintek egy L -től simán függő hermitikus Hamiltoni mátrix sajátértékei, ezért nem válhatnak pl. komplexszé¹.

A megoldás az, hogy a két gyök nem tűnik el, hanem két egymáshoz képest konjugált imaginárius megoldásban folytatódik. $\theta = iu$ helyettesítéssel

$$2ML \sin(u) = \log R_L(iu) + \log R_R(iu) \quad (8.6)$$

Mivel a reflexiós faktorok értéke (C.25) következtében az imaginárius tengelyen mindig valós. Ennek az egyenletnek pontosan akkor van két, egymással ellentett előjelű valós megoldása, ha $L > L_0$ és ekkor

$$E(L) - E_0(L) = E_R + E_L + M \cos u$$

¹ Itt felteszem, hogy a kérdéses kvantumtérelmélet unitér.

Azonban bármilyen valós részecske állapotnak legalább $E_R + E_L + M$ energiája van, a fenti energia azonban ennél határozottan kisebb, vagyis az ennek megfelelő állapotot másképp kell interpretálni. Legyen az R_L és R_R reflexiós faktorok imaginárius tengelyen lévő pólusai közül az origóhoz legközelebb fekvő az iu^* helyen és a határozottság kedvéért legyen ez az R_L szingularitása. Ekkor

$$u \rightarrow u^* \quad \text{as} \quad L \rightarrow \infty$$

vagyis

$$E(L = \infty) - E_0(L = \infty) = E_R + E_L + M \cos u^*$$

Ha u^* a bal perem egy $|B_L^*\rangle$ peremes gerjesztett állapotának felel meg, akkor az egzakt R mátrix elmélet szerint egy ilyen állapot energiája

$$E_L^* = E_L + M \cos u^*$$

vagyis kézenfekvő, hogy az adott energiaszint végtelen térfogatban egy olyan állapothoz tartozik, amelyben a bal perem gerjesztve van.

Amikor a jobb és a bal peremfeltétel azonos, akkor $u = u^*$ -nál kettős pólus van. A fenti megoldás ekkor is létezik, de két olyan állapotnak kell lennie, amelyekben az egyik perem gerjesztve van. Ekkor a fenti megoldást úgy foghatjuk fel, mint az egyik lehetséges hullámfüggvény realizációját. A 8.2.2 alatt tárgyalt peremes TCSA vizsgálatok azt mutatják, hogy a másik lehetséges állapot a (8.5) egyenlet egy olyan megoldásához tartozik, amelyre $u' > u^*$ és $L \rightarrow \infty$ esetén szintén u^* -hoz tart. Az is világos, hogy véges térfogatban a két állapot közül ez utóbbinak van alacsonyabb energiája.

Ha L^* azonos az R peremállapottal, akkor fizikai alapon csak egy állapot létezhet, de a (8.5) egyenletnek továbbra is két megoldása van. Ez azt mutatja, hogy a (8.1) Bethe-Yang egyenleteknek nem minden megoldása tartozik szükségszerűen fizikai állapothoz. Ez a helyzet pl. abban az esetben is, ha az u^* pólushoz nem tartozik peremes gerjesztett állapot, azaz ún. Coleman-Thun pólus. A 8.2 fejezetben mutatok majd példákat a fentebb tárgyalt mechanizmusokra.

A fenti eredmények és velük kapcsolatos további részletek megtalálhatók a Bajnok Zoltánnal és Palla Lászlóval közösen írott [BPT01] cikkben. Végezetül megjegyezzük, hogy analóg megfontolások a kétrészecske S mátrixok pólusaival kapcsolatban is tehetők, amint azt [KTW97]-ben (periodikus határfeltétel mellett) Kausch-sal és Watts-szal együtt tárgyaltuk, és ahonnan a peremes esetre magát az ötletet átvettük.

8.1.3. Peremes termodinamikai Bethe Ansatz

A termodinamikai Bethe Ansatz egyenleteket LeClair, Mussardo, Saleur és Skorik terjesztette ki peremes kvantumtérelméletekre [LMSS95], a következő feltételek mellett. Vegyünk egy integrálható kvantumtérelméletet, amelynek spektruma m_1, \dots, m_n tömegű részecskékből áll, amelyek között nincs tömegdegeneráció, valamint a peremes állapotok sem degeneráltak energiában. A szórás tehát diagonális, ami most azt jelenti, hogy mind a kétrészecske S mátrix amplitúdók, mind pedig az R egyrészecske reflexiós faktorok egy rapiditásfüggő fázistolásra redukálódnak. Tekintsük az elmélet vákuumállapotát egy L hosszúságú intervallumon, az i típusú részecske reflexiós faktora a bal illetve jobb peremen legyen $R_L^{(i)}(\theta)$ illetve $R_R^{(i)}(\theta)$. Tételezzük fel továbbá, hogy a reflexiós faktoroknak nincs pólusuk a $\theta = i\frac{\pi}{2}$ helyen (8.31 alatt majd látjuk, hogy ennek az a következménye, hogy az ún. peremes egyrészecske csatolások eltűnnek). Ekkor a vákuumállapot energiáját az L térfogat függvényében a

$$\epsilon_i(\theta) = 2m_i L \cosh \theta - \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \phi_{ij}(\theta - \theta') \log \left(1 + \chi_j(\theta') e^{-\epsilon_j(\theta')} \right) \quad (8.7)$$

peremes termodinamikai Bethe Ansatz egyenlet („boundary thermodynamic Bethe Ansatz”, BTBA) megoldását a

$$E_0(L) = - \sum_{i=1}^n m_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \log \left(1 + \chi_i(\theta) e^{-\epsilon_i(\theta)} \right) \quad (8.8)$$

formulába helyettesítve nyerhetjük, ahol

$$\phi_{ij}(\theta) = -i \frac{d}{d\theta} \log S_{ij}(\theta) \quad , \quad \chi_i(\theta) = \bar{K}_L^{(i)}(\theta) K_R^{(i)}(\theta) \quad (8.9)$$

$$\bar{K}_L^{(i)}(\theta) = R_L^{(i)} \left(i \frac{\pi}{2} + \theta \right) \quad , \quad K_R^{(i)}(\theta) = R_R^{(i)} \left(i \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

A fenti egyenletek gerjesztett állapotokra való kiterjesztését Dorey és munkatársai adták meg a peremes Lee-Yang modell keretei között [DPTW98].

8.1.4. A TCSA módszer peremes kiterjesztése

A TCSA módszert peremes kvantumtérelméletekre Dorey és munkatársai terjesztették ki [DPTW98], akik alapvető példaként a peremes skálázó Lee-Yang modellt tárgyalták. Ebben a dolgozatban nem foglalkozom peremes minimálmodellek perturbációiként kapható modellekkel; csak a szabad bozon perturbációjaként megkapható peremes sine-Gordon elméletet (ld. C.2.2 alatt) tárgyalom. Ehhez nincs szükség a peremes konform térelméletek apparátusára, ezért a továbbiakban csak a $c = 1$ peremes TCSA alkalmazásához szükséges részleteket ismertetem.

A véges térfogatban a téridő most a $0 \leq x \leq L$, $-\infty < t < \infty$ sáv. A sine-Gordon modell klasszikus hatása a sávon az

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{bsG}} = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{m_0^2}{\beta^2} \cos \beta \Phi \right) + M_0 \cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=0) - \Phi_0) \right. \\ & \left. + M_L \cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=L) - \Phi_L) \right\} \end{aligned}$$

alakot ölti. Az ennek megfelelő perturbált konform térelmélet Hamilton operátora a C.2.2 alattiakat követve általános esetben

$$\begin{aligned} H_{\text{sG}}^{NN} = & H_{c=1}^N - \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^0 dx (V_{(2,0)} + V_{(-2,0)}) \\ & - \frac{\tilde{\mu}_0}{2} \left(e^{-\beta \Phi_0/2} \Psi_1(x=0) + e^{\beta \Phi_0/2} \Psi_{-1}(x=0) \right) \\ & - \frac{\tilde{\mu}_L}{2} \left(e^{-\beta \Phi_L/2} \Psi_1(x=L) + e^{\beta \Phi_L/2} \Psi_{-1}(x=L) \right) \end{aligned}$$

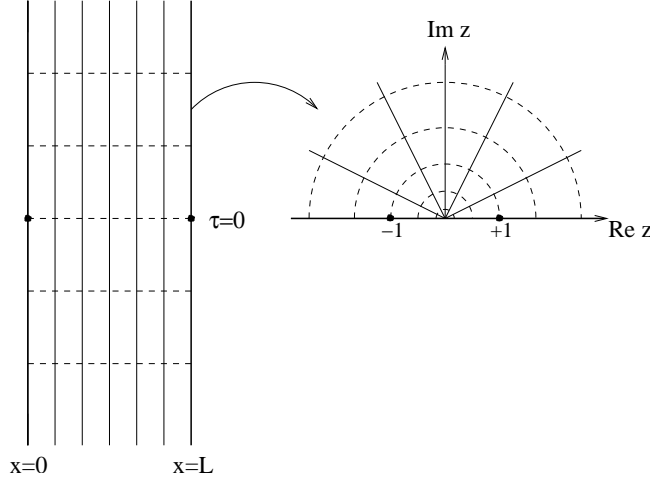
ahol a bozon kompaktifikációs sugara²

$$r = 2 \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta} \quad (8.10)$$

míg kétoldali Dirichlet peremfeltételek esetén

$$H_{\text{sG}}^{DD} = H_{c=1}^D - \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^0 dx (V_{(1,0)} + V_{(-1,0)})$$

² A 4.2.2 alatt tárgyaltakhoz hasonlóan természetesen itt is lehet hajtogatott modelleket definiálni, ahol $r = 2k \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta}$ és a perturbáló operátorok $V_{(2k,0)} + V_{(-2k,0)}$, illetve $e^{-\beta \Phi_0/2} \Psi_k + e^{\beta \Phi_0/2} \Psi_{-k}$. Erre a továbbiakban nem térek ki.



8.1. ábra. A sáv leképezése a felső félsíkra

ahol a kompaktifikációs sugár

$$r = \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta}$$

(kevert peremfeltételek esetén pedig csak a Neumann határfeltételnek megfelelő oldalon kell hozzáadni peremes perturbációt, és kompaktifikációs sugarat (8.10) adja meg). A fenti kifejezésekben szereplő konform térelméleti Hamilton és vertex operátorokat B.30 alatt tárgyalom.

Bevezetve a $\tau = it$ euklidészi időt és a $\xi = \tau - ix$ komplex koordinátát, a $\xi \rightarrow z = e^{\frac{\pi}{L}\xi}$ transzformáció a sávot a z változóban a felső félsíkra képezi (8.1 ábra). Ennek segítségével (Dorey és munkatársai [DPTW98] cikkét követve) a perturbáló Hamilton operátor mátrixa Neumann peremfeltétel esetén a

$$\begin{aligned} H_{\Phi\Phi'}^{(N)} = & -\frac{\pi}{L} \left\{ \frac{\mu L^{2-2\Delta}}{2\pi^{1-2\Delta}} \left(B_{\Phi\Phi'}^{(2)N} + B_{\Phi\Phi'}^{(-2)N} \right) + \frac{\tilde{\mu}_0 L^{1-\Delta}}{2\pi^{1-\Delta}} \left(e^{-\beta\Phi_0/2} C_{\Phi\Phi'}^{(1)+} + e^{\beta\Phi_0/2} C_{\Phi\Phi'}^{(-1)+} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{\mu}_L L^{1-\Delta}}{2\pi^{1-\Delta}} \left(e^{-\beta\Phi_L/2} C_{\Phi\Phi'}^{(1)-} + e^{\beta\Phi_L/2} C_{\Phi\Phi'}^{(-1)-} \right) \right\} \end{aligned}$$

Dirichlet peremfeltételnél pedig a

$$H_{\Phi\Phi'}^{(D)} = -\frac{\pi}{L} \frac{\mu L^{2-2\Delta}}{2\pi^{1-2\Delta}} \left(B_{\Phi\Phi'}^{(2)D} + B_{\Phi\Phi'}^{(-2)D} \right)$$

alakban állíthatjuk elő. A (4.13) alatti tömegrés összefüggés segítségével a fenti kifejezéseket az M szoliton tömeggel dimenziótlanítva, a Hamilton operátor mátrixára a következő eredmény adódik:

$$\begin{aligned} h_{\Phi\Phi'}^{(N)} = \frac{1}{M} H_{\Phi\Phi'}^{(N)} = & -\frac{\pi}{l} \left\{ \frac{\kappa l^{2-2\Delta}}{2\pi^{1-2\Delta}} \left(B_{\Phi\Phi'}^{(2)N} + B_{\Phi\Phi'}^{(-2)N} \right) + \frac{\tilde{\mu}_0}{\sqrt{\mu}} \frac{\kappa^{1/2} l^{1-\Delta}}{2\pi^{1-\Delta}} \left(e^{-\beta\Phi_0/2} C_{\Phi\Phi'}^{(1)+} + e^{\beta\Phi_0/2} C_{\Phi\Phi'}^{(-1)+} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{\mu}_L}{\sqrt{\mu}} \frac{\kappa^{1/2} l^{1-\Delta}}{2\pi^{1-\Delta}} \left(e^{-\beta\Phi_L/2} C_{\Phi\Phi'}^{(1)-} + e^{\beta\Phi_L/2} C_{\Phi\Phi'}^{(-1)-} \right) \right\} \\ h_{\Phi\Phi'}^{(D)} = \frac{1}{M} H_{\Phi\Phi'}^{(D)} = & -\frac{\pi}{l} \frac{\kappa l^{2-2\Delta}}{2\pi^{1-2\Delta}} \left(B_{\Phi\Phi'}^{(2)D} + B_{\Phi\Phi'}^{(-2)D} \right) \end{aligned}$$

ahol a

$$\frac{\tilde{\mu}_{0,L}}{\sqrt{\mu}}$$

paraméterek a peremes potenciál erősségét jellemző dimenziótlan csatolási állandók. A (C.33,C.36) alatt megadott relációk segítségével megadható az összefüggés a bal, illetve jobb oldali peremet jellemző

$$\frac{\tilde{\mu}_{0,L}}{\sqrt{\mu}}, \Phi_{0,L}$$

paraméterek és a hozzájuk tartozó reflexiók faktorokat jellemző

$$\eta_{0,L}, \vartheta_{0,L}$$

Ghoshal-Zamolodchikov paraméterek között.

8.2. A peremes sine-Gordon elmélet véges térfogatban: TCSA analízis

Az előző fejezet végén vázolt peremes TCSA módszert alkalmazva, Bajnok Zoltánnal és Palla Lászlóval együttműködésben megvizsgáltuk a peremes sine-Gordon modell spektrumát [BPT01, BPT02a]. Az alábbiakban ennek a munkának az eredményeiből adok ízelítőt.

8.2.1. Általános (perturbált Neumann) határfeltételek

A peremes TCSA-ban egy adott e_{cut} levágás alatti állapotok száma erősen függ a β csatolástól (a (8.10) alatti r kompaktifikációs sugáron keresztül), mivel (B.32) szerint Neumann határfeltételek mellett a konform Hilbert-tér több modul összege, és ezek száma erősen függ r -től, mégpedig r növelésével rohamosan nő. Másfelől viszont éppen nagy r mellett konvergál jobban a TCSA a levágás függvényében: az ultraibolya divergenciák éppen $r < 2$ -nél ($\beta > \sqrt{4\pi}$) jelentkeznek, és minél távolabb vagyunk ettől a tartománytól, annál jobb a konvergencia.

Ezen a problémán úgy lehet segíteni, hogy olyan határfeltételeket használunk, amelyekre $\Phi_0 = \Phi_L = 0$ (azaz a Ghoshal-Zamolodchikov paraméterekkel $\vartheta_0 = \vartheta_L = 0$), akkor ugyanis (a 7.2.2.2 alatt ismertetett eljárás analógiájára) a $\Phi \mapsto -\Phi \mathbb{Z}_2$ szimmetria lehetővé teszi a Hilbert-tér páros/páratlan szektorokra történő projekcióját. Amennyiben a peremes kötött állapotok spektrumát tekintjük (ld. C.2.2 alatt), ez nem függ ϑ -tól, ezért az általános spektrum ebben az esetben is tanulmányozható.

Megjegyzem, hogy (C.33) alapján a perturbálatlan Neumann határfeltételnek ($\tilde{\mu} = 0$) az

$$\eta = \eta_N = \pi \frac{\lambda + 1}{2}, \quad \vartheta = 0$$

paraméterek felelnek meg.

8.2.1.1. A perem energiája

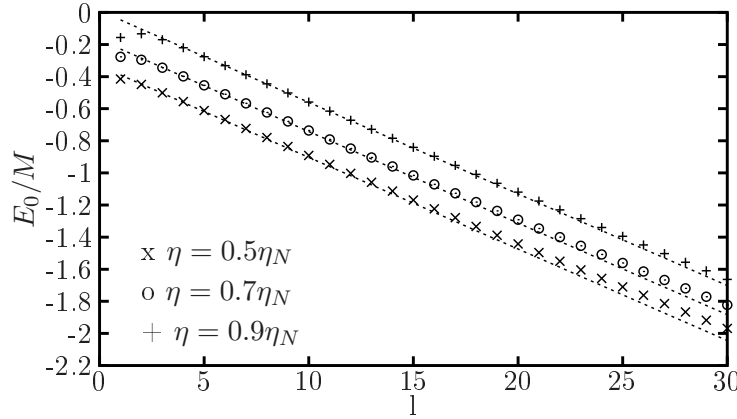
A numerikus adatok segítségével először a (C.34) alatti peremes energiajárulékot teszteljük. Az alapállapot energiája nagy térfogatban

$$E_0(L) = \mathcal{B}M^2L + E_b(\eta_0, \vartheta_0) + E_b(\eta_L, \vartheta_L) + O(e^{-ML}) \quad (8.11)$$

ahol \mathcal{B} a (4.14) univerzális vákuumenergia állandó. Ezt a jóslatot a 8.2 ábrán hasonlítjuk össze a TCSA numerikus adatokkal. Az egyezés annyira jó, hogy a fenti jóslatot a numerikus adatokra illesztve az $5 \leq ML \leq 15$ intervallumban, \mathcal{B} és a peremes energiajárulékok összege elfogadható pontossággal meghatározható.

A peremes energiajárulék ϑ függését is ellenőriztük: az állapotok nagy számát azzal lehet kompenzálni, hogy mélyen a vonzó tartományban számolunk, ahol a TCSA gyorsan konvergál. A $\lambda = 17$ választással és $e_{\text{cut}} = 13$ mellett 4147 állapottal kell számolni, és a $6 \leq ML \leq 17$ tartományban egyenest illesztve a peremes energiajárulék mérhető volt: az eredményeket a 8.1 táblázat tartalmazza.

Megjegyezzük, hogy a fenti egyezés nem csak a (C.34) peremes energiajárulék formulát, de a (C.33) relációt is alátámasztja, hiszen mint 8.1.4 végén írtam, a TCSA bemenő paramétereit ennek segítségével lehet az η, ϑ paraméterekbe átszámolni.



8.2. ábra. Az $E_0(L)$ alapállapot energiája $\beta = \sqrt{\pi}$ esetén, $\eta_0 = \eta_L = \eta$ és $\vartheta_0 = \vartheta_L = 0$ mellett.

ϑ	$E(\eta_N, 0) + E(\eta, \vartheta)$ (jósolt)	$E(\eta_N, 0) + E(\eta, \vartheta)$ (TCSA)
5	-0.22259	-0.226959
10	-0.29012	-0.29986

8.1. táblázat. TCSA módszerrel mért peremes energiajárulékok ϑ -függése, ahol $\lambda = 17$ ($\beta = \frac{2}{3}\sqrt{\pi}$) és $\eta = 0.7\eta_N$.

8.2.1.2. Reflexiós faktorok és a peremes gerjesztett állapotok spektruma

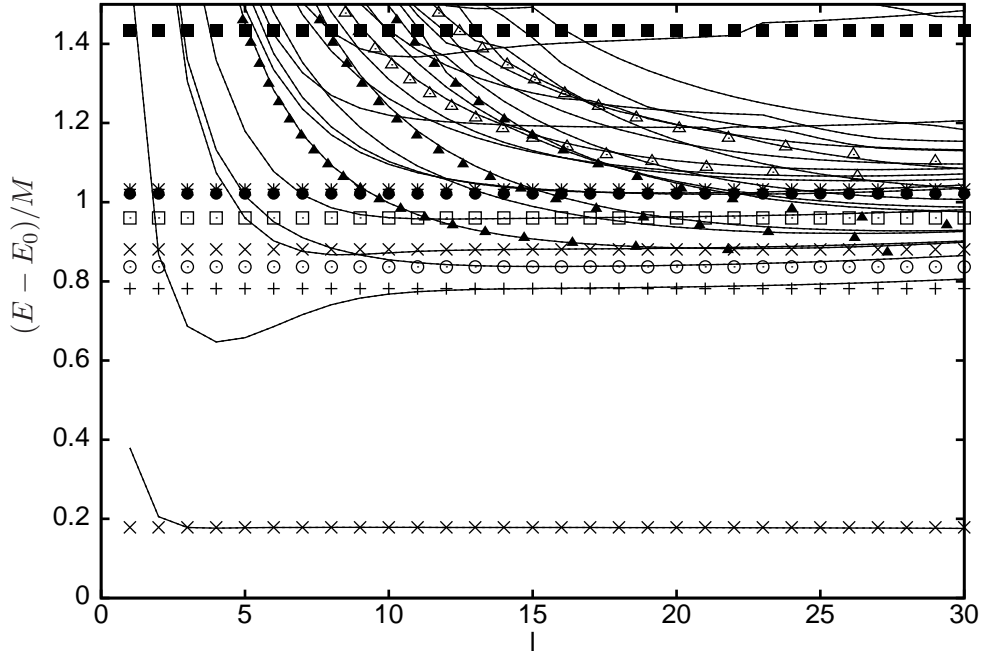
Az összehasonlítást csak a $\vartheta_0 = \vartheta_L = 0$ határfeltételekre végzem el. Ennek megfelelően alkalmazhatjuk a paritás szerinti szektorokra bontást. Megjegyzem, hogy míg a B_n lélegző paritása $(-1)^n$, a szolitont és az antiszolitont a $\Phi \rightarrow -\Phi$ transzformáció felcseréli. Az egyes peremes gerjesztett állapotok paritása annak alapján dönthető el, hogy a megfelelő pólus a $P \pm Q$ amplitúdók közül melyikben fordul elő (ld. (C.30); $\vartheta = 0$ esetén $P^+ = P^- = P$). A C.2.2 alatti eredményeket analizálva az adódik, hogy az $|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle$ állapot paritása

$$(-1)^{\sum_k n_k}$$

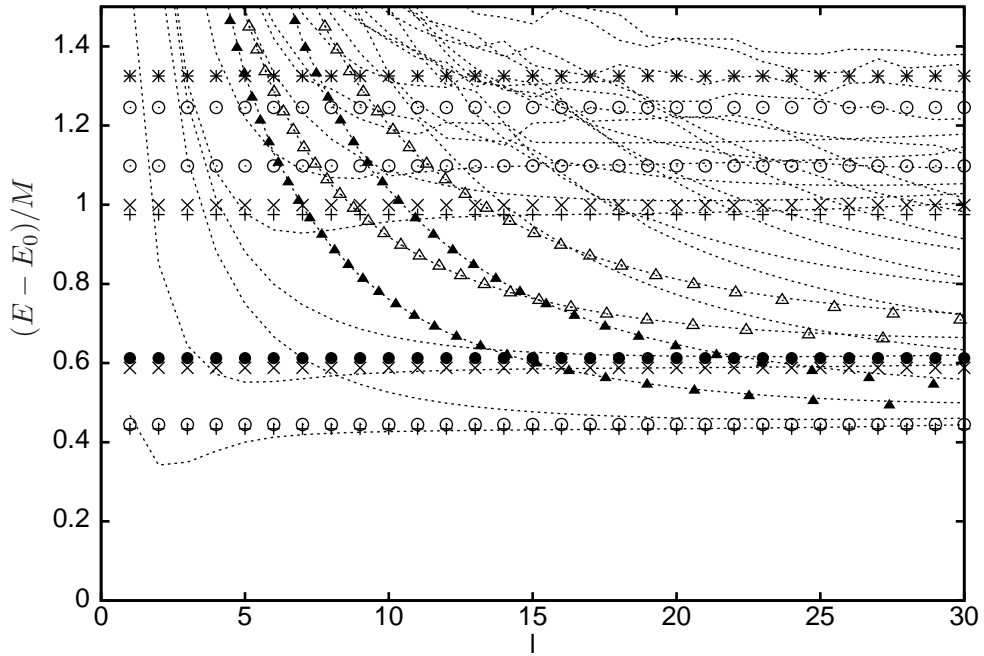
(az alapállapotot minden esetben üres $| \rangle$ jelöli). A véges térfogatbeli állapot paritása természetesen a két perem, illetve a köztük zárt részecskék paritásainak szorzata. A C.2.2 alatt szereplő spektrumot λ (vagy másképpen β) és η számos különböző értéke mellett ellenőriztük. Az egyik peremen mindig tiszta Neumann határfeltételt ($\eta = \eta_N$) vettünk fel, az ennek megfelelő peremes állapotokat N index különbözteti meg. A két peremre várt gerjesztett állapotok ennek megfelelően osztályozhatók. A $\lambda = 7$ és $\eta = 0.9\eta_N$ modell páros szektorát a 8.3 ábrán, a páratlant a 8.4 ábrán mutatom be amelyeken az M szoliton tömeggel dimenziótlanított energiaszinteket ábrázoltam l függvényében, a (páros szektorban lévő) alapállapothoz viszonyítva. Mindkét ábrán a folytonos vonalak az interpolált TCSA adatok, míg a különböző szimbólumok a peremes gerjesztett állapotokra tett jóslatokat, illetve a (8.4) peremes Bethe-Yang egyenletekből számolt egyrészecske állapotokat mutatják³.

Az ábrák egyértelműen mutatják, hogy az általunk [BPTT02]-ban lezármasztott gerjesztett állapot spektrum helytálló. Különösen figyelemre méltó, hogy nem látunk sehol $|1, 1\rangle$ -nek megfelelő kötött állapotot. A részletes analízis szerint az ennek megfelelő pólust az adott paraméterek mellett egy Coleman-Thun diagram kell magyarázza (ami akkor létezik, ha $w_1 > \nu_1$). Mindenütt

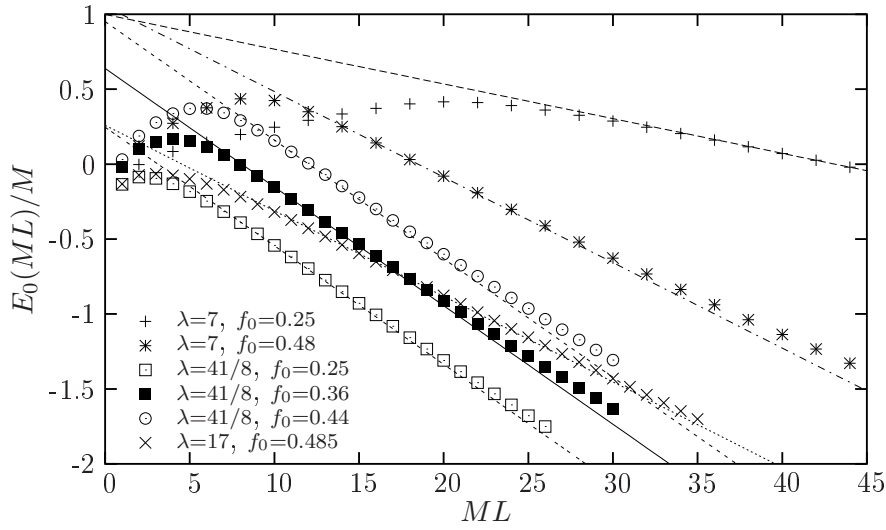
³ A TCSA vonalakban látható törések a numerikus algoritmus eredménye: ilyenkor az adott helyen szintmetzés van, de a magasabban lévő szint már nem került rá az ábrára.



8.3. ábra. A páros szektor: x jelöli a $|\rangle_N \otimes |0\rangle$ és $|\rangle_N \otimes |2\rangle$ -nek megfelelő energiát, + a $|2\rangle_N \otimes |\rangle$, o az $|\rangle_N \otimes |0, 2\rangle$, • és az üres/teli négyzetek az $|1\rangle_N \otimes |1\rangle$, $|2\rangle_N \otimes |0\rangle$ and $|1\rangle_N \otimes |3\rangle$ állapotokat, a* a $|\rangle_N \otimes |0, 1, 1\rangle$ állapotot, a teli/üres háromszögek pedig B^2 egyrészecske állapotokra a Bethe-Yang egyenletekből kapott jóslatok alapállapotú ($|\rangle_N \otimes |\rangle$), illetve $|\rangle_N \otimes |0\rangle$ peremek esetén.



8.4. ábra. A páratlan szektor: x jelöli az $|\rangle_N \otimes |1\rangle$ és $|\rangle_N \otimes |3\rangle$ energiáját, +: $|\rangle_N \otimes |1\rangle_N$ és $|\rangle_N \otimes |3\rangle_N$, •: $|1\rangle_N \otimes |0\rangle$, o : $|\rangle_N \otimes |0, 1\rangle$, $|\rangle_N \otimes |0, 3\rangle$ és $|\rangle_N \otimes |1, 2\rangle$, *: $|\rangle_N \otimes |0, 1, 2\rangle$, a teli/üres háromszögek B^1 egyrészecske állapotok alapállapotú ($|\rangle_N \otimes |\rangle$), illetve $|\rangle_N \otimes |0\rangle$ peremek esetén



8.5. ábra. A (8.11) által jósolt vákuum energia aszimptotika összevetése a TCSA eredményekkel: folytonos vonalakkal az egzakt jóslat, a pontok a TCSA adatokat mutatják, λ és $f_0 = \frac{\beta\Phi_0}{2\pi} = \frac{\beta\Phi_L}{2\pi}$ különböző értékeire.

pontosan azok az állapotok jelennek meg, amelyeket a peremes Coleman-Thun mechanizmus nem zár ki. A fenti munka elvégzésének időpontjában a Coleman-Thun mechanizmus peremes kiterjesztése sejtéseken alapult, ezért a fenti megerősítés nagyon fontos volt; azóta Bajnok Zoltánnal és Böhm Gabriellával együttműködésben sikerült ezt a mechanizmust a peremes kvantumtérelméletek alapvető elveiből levezetni [BBT04]. Az egyrészecske állapotokra vonatkozó jóslatok egyezése a spektrummal pedig a megfelelő reflexiós faktorok helyességét támasztja alá.

8.2.2. TCSA: Dirichlet határfeltételek

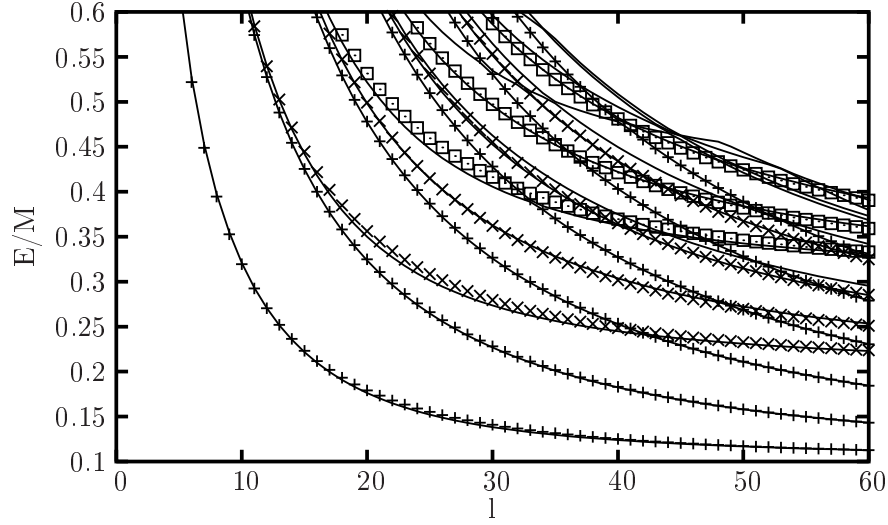
Dirichlet határfeltételek mellett a (B.36) Hilbert-tér egyetlen Fock modulból áll, és bázisa a paraméterektől függetlenül megadható. Ez azt is jelenti, hogy ilyenkor jóval magasabb e_{cut} értékeket el lehet érni: a lentebb közölt numerikus adatokban $e_{\text{cut}} = 22$, ami 4508 vektort jelent. Az összes számolás során a $\Phi_0 = \Phi_L$ esetet vizsgáltuk, azaz amikor a két oldalon ugyanaz a Dirichlet határfeltétel volt adott. A peremes energia járulékra kapott eredményeket a 8.5 ábra foglalja össze, B_1 , B_2 és B_3 alapállapot reflexiós faktorának ellenőrzésére egy példa a 8.6 ábrán látható. A 8.7 ábrán egy példát mutatok a kötött állapotok térfogati korrekcióinak meghatározására a 8.1.2 alatt tárgyalt analitikus elfolytatás módszerének alkalmazásával.

8.3. Peremes sine-Gordon elmélet véges térfogatban: szemiklasszikus eredmények

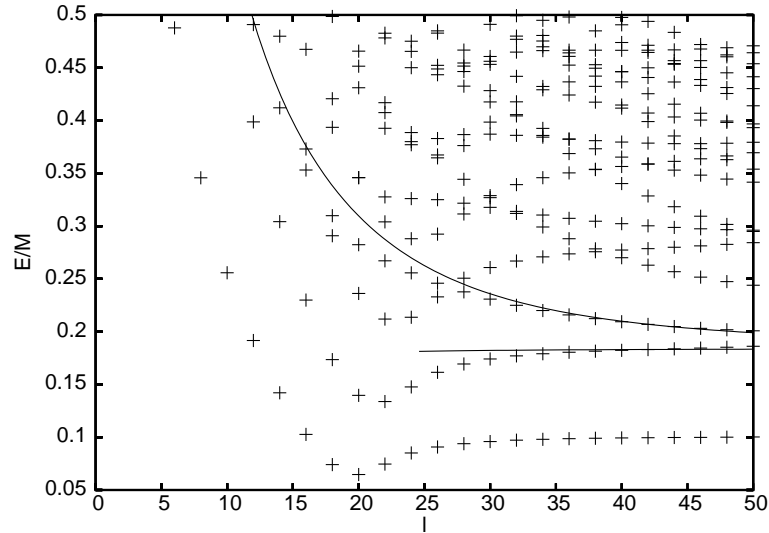
8.3.1. Vákuummegoldások végtelen térfogatban

A peremes sine-Gordon elmélet hatása:

$$\mathcal{A}_{\text{bsG}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \int_{-\infty}^0 dx \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{m^2}{\beta^2} (\cos \beta \Phi - 1) \right) + M_0 \left(\cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=0) - \Phi_0) - 1 \right) \right\} \quad (8.12)$$



8.6. ábra. B_1 , B_2 és B_3 alapállapotú reflexiós faktorainak ellenőrzése $\lambda = 31$ és $\frac{\beta\Phi_0}{2\pi} = 0.2$ mellett. A pontok a (8.4) Bethe-Yang egyenlet által jósolt egyrészecske energiák, míg a folytonos vonalak az interpolált TCSA adatok. Minden energiát az alapállapothoz viszonyítva és a szoliton tömeg egységeiben mérve ábrázoltam. Az eltérések részben csonkolási hibák, részben pedig annak tudhatók be, hogy a Bethe-Yang egyenletek elhanyagolják a térfogattal exponenciálisan lecsengő végesméret korrekciókat.



8.7. ábra. Peremes gerjesztett állapotok $\lambda = 17$ és $\frac{\beta\Phi_0}{2\pi} = 0.485$ mellett. A felső vonal az $I = 0$ B_1 egyrészecske állapot és annak folytatása imaginárius rapiditásokra, az alsó pedig a 8.1.2 alatt tárgyalt másik megoldás (ami ugyanahhoz a pólushoz tart nagy térfogatban). A két vonal nagyon jól illeszkedik a $|\rangle \otimes |0, 1\rangle \pm |0, 1\rangle \otimes |\rangle$ állapotok nagy térfogatú viselkedéséhez.

ahol a potenciál normálása (C.29)-től eltér, így mindkét potenciálfüggvény minimumértéke 0. Az egyszerűség kedvéért Dirichlet határfeltételek mellett illusztrálom az eredményeket (azaz $M_0 = \infty$ határesetben). A Φ_0 paraméter fizikailag inekvivalens értékei

$$0 \leq \frac{\beta}{2}\Phi_0 \equiv \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

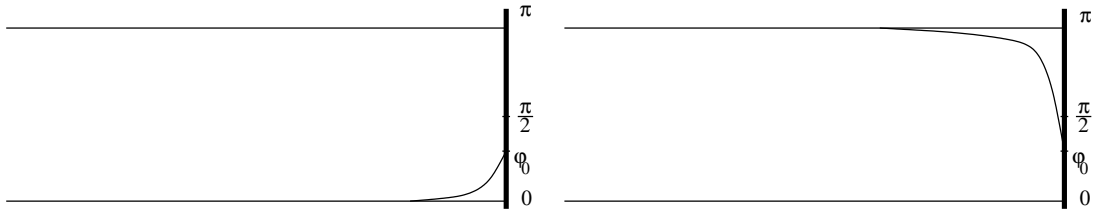
A sztatikus mozgás egyenlet

$$\partial_x^2 \Phi = \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \Phi \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}(\partial_x \Phi)^2 = \hat{C} + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos \beta \Phi) \quad (8.13)$$

és energia funkcionál

$$E[\Phi(x)] = \int_{-\infty}^0 dx \left(\frac{1}{2} (\partial_x \Phi)^2 + V(\Phi(x)) \right) + V_B(\Phi(0))$$

A véges energiás megoldásokat egy szoliton/antiszoliton adja:



$$\Phi_+(x, a^+) = \frac{4}{\beta} \arctan(e^{m(x-a^+)}) \quad ; \quad \Phi_-(x, a^-) = \frac{2\pi}{\beta} - \frac{4}{\beta} \arctan(e^{m(x-a^-)})$$

ahol a határfeltételekből $\sinh(ma^\pm) = \pm \cot(\varphi_0)$. A megfelelő energiák

$$E_\pm(\varphi_0) = \frac{4m}{\beta^2}(1 \mp \cos \varphi_0) \quad (8.14)$$

és $x \rightarrow -\infty$ esetén exponenciálisan gyorsan tartanak az aszimptotikus értékhez:

$$\Phi_+(x, a^+) = O(e^{-m|x|}) \quad , \quad \Phi_-(x, a^-) = \frac{2\pi}{\beta} + O(e^{-m|x|}) \quad \text{as } x \rightarrow -\infty. \quad (8.15)$$

A megoldások körüli kis rezgéseket a

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + m^2 - \frac{2m^2}{\cosh^2(m[x - a^\pm])} \right] \xi_\pm(x) = \omega^2 \xi_\pm(x) \quad ; \quad \xi_\pm(0) = 0 \quad .$$

Schrödinger típusú differenciál egyenlet írja le. Ennek diszkrét spektruma egyetlen normálható módust tartalmaz:

$$\xi_\pm(x) \propto e^{m\epsilon(x-a^\pm)}(\epsilon - \tanh[m(x-a^\pm)]) \quad , \quad \omega^2 = m^2(1 - \epsilon^2) \text{ ahol } \epsilon \geq 0$$

A határfeltételekből $\epsilon = \mp \cos \varphi_0$, tehát csak az antiszoliton vákuumállapotnak van diszkrét módusa: ez a perem gerjesztett állapotát írja le. A folytonos spektrumhoz tartozó sajátfüggvények:

$$\xi_\pm(x) = \tilde{A}_\pm e^{-iq(x-a^\pm)} \frac{iq + m \tanh(m[x - a^\pm])}{iq + m} + \tilde{B}_\pm e^{iq(x-a^\pm)} \frac{iq - m \tanh(m[x - a^\pm])}{iq - m}$$

$$\omega^2 = m^2 + q^2 \quad , \quad q \geq 0$$

ahol az $\tilde{A}_\pm/\tilde{B}_\pm$ arányok a határfeltételből határozhatók meg. Az aszimptotikus viselkedés $x \rightarrow -\infty$ mellett

$$\xi_\pm(x) \rightarrow C_\pm(e^{iqx} + e^{-iqx}e^{i\delta^\pm(q)}) \quad (8.16)$$

ahol a klasszikus reflexiós faktor:

$$e^{i\delta^\pm(q)} = \frac{m - iq}{m + iq} \frac{\pm \cos \varphi_0 + \frac{iq}{m}}{\mp \cos \varphi_0 + \frac{iq}{m}} \quad (8.17)$$

A diszkrét módus a reflexiós faktor φ_0 -tól függő pólusának felel meg, a másik pólus kinematikai eredetű. A módusok frekvenciáinak összegzésével megkapható a vákuumállapot energiájának vezető kvantumkorrekciója:

$$E_+^{\text{semiclass}}(\varphi_0) - E_-^{\text{semiclass}}(\varphi_0) = m \left(\frac{8}{\beta^2} - \frac{1}{\pi} \right) \cos \varphi_0 + m \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_0}{\pi} \right) \sin \varphi_0 + O(\beta^2) \quad (8.18)$$

A fenti eredmények megkaphatók a C.2.2 alatti egzakt kvantum eredmények $\beta \rightarrow 0$ határeseteként. Ebben az esetben a szoliton vákuumállapot $| \rangle$, az antiszoliton vákuumállapot $| 0 \rangle$ klasszikus megfelelője. A kettő energiakülönbsége:

$$E_{|0\rangle} - E_{| \rangle} = \frac{m_1}{2 \sin \frac{\pi}{2\lambda}} \cos \left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\pi}{2\lambda} \right)$$

ahol m_1 a B_1 első lélegző tömege. Amennyiben (C.36) felhasználásával kifejezzük η -t φ_0 -val:

$$\varphi_0 = \frac{\eta}{\lambda + 1}$$

és $\beta = 0$ körül sorba fejtünk, pontosan megkapjuk a (8.18) eredményt, ha az m és m_1 értékét azonosítjuk (ezt annak a jól ismert ténynek alapján tehetjük meg, hogy az első lélegző felel meg a sine-Gordon bozon elemi gerjesztésének [ZZ79]). Ugyanebben a határesetben a B_1 reflexiós faktorai a megfelelő peremállapotokon átmennek a (8.17) klasszikus reflexiós faktorokba.

A fenti eredmények megfelelője általános határfeltételekre Kormos és Palla cikkében található [KP02].

8.3.2. Véges térfogat: általános megfontolások

8.3.2.1. Sztatikus megoldások

Véges térfogatban az elmélet klasszikus hatását az

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{bsG}} = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{m^2}{\beta^2} (\cos \beta \Phi - 1) \right) \right. \\ & \left. + M_L \left(\cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=0) - \Phi_L) - 1 \right) + M_0 \left(\cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=0) - \Phi_0) - 1 \right) \right\} \end{aligned} \quad (8.19)$$

alakba írva, a mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \Phi - \partial_x^2 \Phi + \frac{m^2}{\beta} \sin \beta \Phi &= 0 \\ \partial_x \Phi|_{x=z} &= -(-1)^{z/L} \frac{\beta M_z}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\Phi(z, t) - \Phi_z) \quad , \quad z = 0, L \end{aligned}$$

A sztatikus megoldások energiája

$$\begin{aligned} E[\Phi(x)] = & \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} (\partial_x \Phi)^2 - \frac{m^2}{\beta^2} (\cos \beta \Phi - 1) \right) \\ & + M_L \left(\cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=0) - \Phi_L) - 1 \right) + M_0 \left(\cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=0) - \Phi_0) - 1 \right) \end{aligned} \quad (8.20)$$

Az általános sztatikus megoldás egyszerűen felírható

$$x = \int_{\Phi(0)}^{\Phi(x)} \frac{du}{\pm \sqrt{2 \left(\hat{C} - \frac{m^2}{\beta^2} (\cos \beta u - 1) \right)}} \quad (8.21)$$

ahol a két integrációs konstansot ($\Phi(0)$ és \hat{C}) a határfeltételek rögzítik. A fenti integrál kifejezhető a Weierstrass-féle \mathbf{p} -függvénnyel.

Az $L \rightarrow \infty$ határesetben a véges energia feltétele, hogy

$$\Phi(x) \rightarrow \frac{2\pi n}{\beta}$$

az $x = 0$ és $x = L$ végpontoktól távol. Ebben az esetben a megoldás két félvégteles vákuum-konfiguráció összevarrásával közelíthető ($\exp(-mL)$ nagyságrendű korrekciók erejéig). Azonban csak olyan vákuummegoldásokat lehet összeilleszteni, amelyek aszimptotikus értéke azonos (ez biztosítja az intervallum közepén a megoldás folytonosságát). Az illesztési feltételeket a következőképpen lehet leírni. Defináljuk a peremes állapotok szoliton paritását úgy, hogy $| \rangle$ legyen páros: ez a

$$\Phi(x) \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad x \rightarrow -\infty \quad (8.22)$$

aszimptotikának felel meg, $|0\rangle$ pedig páratlan, aszimptotikája

$$\Phi(x) \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{ha} \quad x \rightarrow -\infty \quad (8.23)$$

Egy tetszőleges

$$|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle$$

peremes gerjesztett állapotot úgy kapunk, hogy egymás után szolitonokat és antiszolonokat fuzionáltatunk a peremmel; minden ilyen fúzió váltja az aszimptotikát, és ezzel a paritást is, ezért az ilyen állapot szoliton paritása nem más, mint $(-1)^k$. Ez a paritásfogalom természetes kiterjesztése annak, amit Dirichlet határfeltételek esetén Mattsson és Dorey definiált [MD00].

A véges térfogatban az illesztési szabály ekkor azt mondja ki, hogy egy állapot csak akkor jöhet létre, ha annak teljes szolitonikus paritása $+1$: ezt a két oldalon lévő peremállapot paritásának, valamint a köztük mozgó szolitonikus gerjesztések N számából számolt $(-1)^N$ szorzata adja⁴. Ezt nagyon könnyen lehet ellenőrizni a TCSA spektrumokon⁵.

8.3.2.2. Kis rezgések

Egy $\phi(x)$ sztatikus megoldás körüli kis rezgéseket

$$\Phi(x, t) = \phi(x) + \xi(x) \exp(-i\omega t)$$

a mozgásegyenleteket $\xi(x)$ -ben linearizált változata írja le:

$$-\frac{d^2 \xi}{dx^2} + V''(\phi(x)) \xi(x) = \omega^2 \xi(x)$$

$$\partial_x \xi(x)|_{x=z} = (-1)^{z/L} M_z \frac{\beta^2}{4} \cos \frac{\beta}{2} (\phi(z) - \Phi_z) \xi(z) \quad , \quad z = 0, L \quad (8.24)$$

(Dirichlet határfeltétel esetén $\xi(x)$ -nek el kell tűnnie a megfelelő határpontban). A (8.21) általános sztatikus megoldást behelyettesítve az ún. elsőrendű Lamé egyenlet adódik.

⁴ Mivel a (C.30) reflexiós faktorok általános határfeltételek mellett nem őrzik meg a topologikus töltést, egy állapotban a szolitonok és antiszolonok száma külön-külön nem jól definiált, de a fenti paritás igen.

⁵ A 8.3 és 8.4 ábrákon bemutatott spektrumok ezt a szabályt csak látszólag sértik, mivel a perturbálatlan Neumann határfeltétel esetén (általánosabban akkor, ha $\eta = \eta_N$) $| \rangle_N$ és $|0\rangle_N$ degenerált, ezért nem tudjuk megkülönböztetni ezeket energiájuk alapján (ráadásul a reflexiós faktoruk is azonos). Ezért mindig meg lehet tenni a $|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle_N \equiv |0, n_1, n_2, \dots, n_k\rangle_N$ azonosítást, de ekkor persze elveszítjük a szoliton paritást mint kvantumszámot és az általa definiált kiválasztási szabályt is.



8.8. ábra. A klasszikus Bethe-Yang egyenlet származtatása

Az $L \rightarrow \infty$ határesetben a hátteret a félvégtelesztatikus megoldásokkal kifejezve, a megoldás könnyen felírható:

$$\begin{aligned}\xi(x) &\sim A \left(e^{-ikx} + r_1(k)e^{ikx} \right) \quad \text{ha } x \text{ nagy} \\ \xi(x) &\sim B \left(e^{ik(x-L)} + r_2(k)e^{-ik(x-L)} \right) \quad \text{ha } L-x \text{ nagy}\end{aligned}$$

(8.8 ábra) ahol $r_1(k)$ és $r_2(k)$ a megfelelő klasszikus reflexiós faktorok, amelyeket Dirichlet határfeltételek mellett (8.16)-ben adtam meg, adott klasszikus reflexiós faktorok, általános határfeltételekre Kormos és Palla cikkében megtalálhatók [KP02]. A két aszimptotikus alaknak bármely x -re meg kell egyeznie, ebből

$$r_1(k)r_2(k)e^{2ikL} = 1 \quad (8.25)$$

és ez pontosan a (8.4) Bethe-Yang egyenletek klasszikus határesetre.

8.3.3. Eredmények

A véges térfogatbeli kvantálási feltételt (amelynek aszimptotikus alakja (8.25)) számos határfeltételre kiszámoltuk, és megadtuk a vákuummegoldás egzakt klasszikus energiáját is. Itt most csak az energiakifejezés nagy térfogatban érvényes aszimptotikus viselkedését írom fel, mivel a későbbiekben erre lesz szükségünk. A részletes analízis a Bajnok Zoltánnal és Palla Lászlóval közös [BPT05b] cikkünkben megtalálható. Hasonló, bár a mienknél kevésbé részletes és kiterjedt analízist végzett velünk párhuzamosan és tőlünk függetlenül Mussardo, Riva és Sotkov [MRS05]. A következő eseteket sorolom itt fel:

- Alapállapot (+) és gerjesztett állapot (-) a

$$\frac{\beta\Phi(0)}{2} = \varphi_0 \quad , \quad \frac{\beta\Phi(0)}{2} = 0$$

- Alapállapot (A) és gerjesztett állapot (B) a

$$0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq \varphi_L \leq \pi - \varphi_0 \quad , \quad \frac{\beta\Phi(0, L)}{2} = \varphi_{0, L}$$

Dirichlet-Dirichlet határfeltételekkel;

- Alapállapot (-1) a

$$0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{\beta\Phi(L)}{2} = \varphi_L - \pi$$

Dirichlet-Dirichlet határfeltételekkel;

ahol emlékeztetek arra, hogy a félvégteles esetben a φ_0 paraméter inekvivalens értékeinek tartománya

$$0 \leq \frac{\beta}{2}\Phi_0 \equiv \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

és itt mind φ_0 , mind pedig φ_L értékét ebben a tartományban értjük. A fenti megoldásokat a 8.9 ábrán szemléltetem.

• Alapállapot (DN) a következő kevert típusú határfeltételek mellett

$$\frac{\beta}{2}\Phi(0) = \varphi_0, \quad \frac{\beta}{2}\Phi'(x)|_{x=L} = -m\mathcal{A}^{-1} \sin\left(\frac{\beta}{2}\Phi(x=L)\right), \quad \mathcal{A}^{-1} = \frac{M_L\beta^2}{4m}.$$

Az összes sztatikus megoldás kifejezhető a következő (elliptikus) integrálokkal

$$\mathcal{I}_1(a, b, C) = \int_a^b \frac{dv}{\sqrt{\sin^2 v + C}}, \quad \mathcal{I}_2(a, b, C) = \int_a^b dv \sqrt{\sin^2 v + C}$$

Bevezetve az $l = mL$ jelölést a dimenziótlanított térfogatra, a következőket kapjuk:

$$(+) : \quad l = \mathcal{I}_1(0, \varphi_0, C), \quad E_+(\varphi_0, l) = \frac{4m}{\beta^2}[\mathcal{I}_2(0, \varphi_0, C) - Cl/2]$$

$$(-) : \quad l = \mathcal{I}_1(\varphi_0, \pi, C), \quad E_-(\varphi_0, l) = \frac{4m}{\beta^2}[\mathcal{I}_2(\varphi_0, \pi, C) - Cl/2]$$

$$(A) : \quad l = \sum_{i=0, L} \mathcal{I}_1(\epsilon, \varphi_i, -\sin^2 \epsilon), \quad E_A(\varphi_0, \varphi_L, l) = \frac{4m}{\beta^2} \left[\sum_{i=0, L} \mathcal{I}_2(\epsilon, \varphi_i, -\sin^2 \epsilon) + \frac{l}{2} \sin^2 \epsilon \right]$$

$$(B) : \quad l = \sum_{i=0, L} \mathcal{I}_1(\varphi_i, \pi - \epsilon, -\sin^2 \epsilon)$$

$$E_B(\varphi_0, \varphi_L, l) = \frac{4m}{\beta^2} \left[\sum_{i=0, L} \mathcal{I}_2(\varphi_i, \pi - \epsilon, -\sin^2 \epsilon) + \frac{l}{2} \sin^2 \epsilon \right]$$

$$(-1) : \quad l = \mathcal{I}_1(0, \varphi_0, C) + \mathcal{I}_1(0, \pi - \varphi_L, C)$$

$$E^{(-1)}(\varphi_0, \varphi_L, l) = \frac{4m}{\beta^2}[\mathcal{I}_2(0, \varphi_0, C) + \mathcal{I}_2(0, \pi - \varphi_L, C) - Cl/2]$$

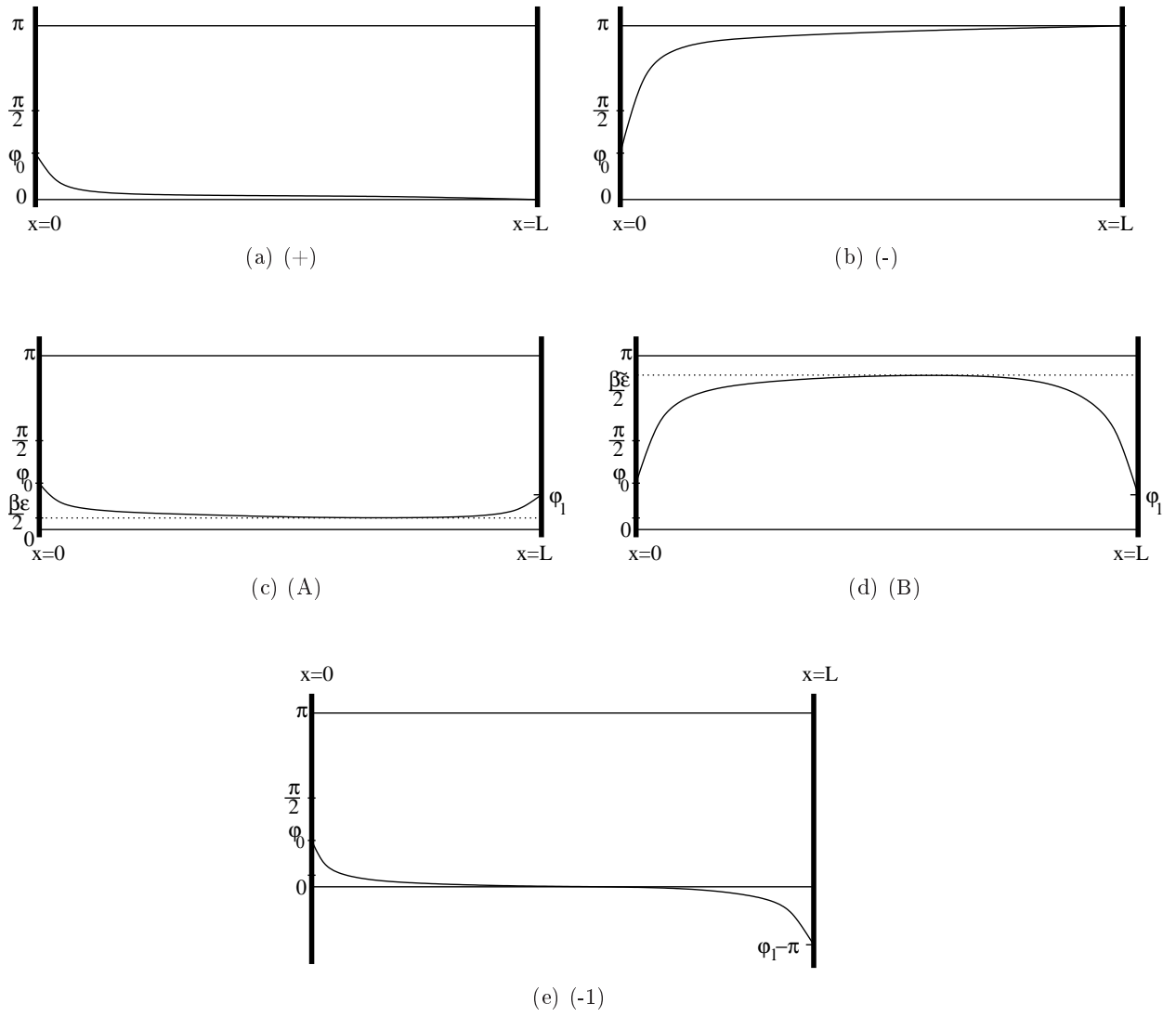
$$(DN) : \quad l = \mathcal{I}_1(\varphi_L, \varphi_0, \tilde{C}), \quad E^{(DN)}(\varphi_0, \mathcal{A}, l) = \frac{4m}{\beta^2} \left[-\tilde{C} \frac{l}{2} + \mathcal{I}_2(\varphi_L, \varphi_0, \tilde{C}) - \mathcal{A}^{-1} \cos(\varphi_L) \right]$$

$$\tilde{C} = -(1 - \mathcal{A}^{-2}) \sin^2 \varphi_L$$

A fenti kifejezések az energia térfogatfüggését parametrikus formában adják meg: valamennyi esetben a C vagy ϵ vagy φ_L integrációs konstans az első egyenletet megoldva kapható meg, amit a másodikba helyettesítve előáll az energia kifejezése. Az energia aszimptotikus viselkedése nagy térfogatban zárt alakban megadható:

$$\begin{aligned} E_+(\varphi_0, l) &\sim \frac{4m}{\beta^2} \left(1 - \cos \varphi_0 + 4 \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} e^{-2l} \right) \\ E_-(\varphi_0, l) &\sim \frac{4m}{\beta^2} \left(1 + \cos \varphi_0 + 4 \cot^2 \frac{\varphi_0}{2} e^{-2l} \right) \\ E_A(\varphi_0, \varphi_L, l) &\sim \frac{4m}{\beta^2} \left(2 - \cos \varphi_0 - \cos \varphi_L - 8 \tan \frac{\varphi_0}{2} \tan \frac{\varphi_L}{2} e^{-l} \right) \\ E_B(\varphi_0, \varphi_L, l) &\sim \frac{4m}{\beta^2} \left(2 + \cos \varphi_0 + \cos \varphi_L - 8 \cot \frac{\varphi_0}{2} \cot \frac{\varphi_L}{2} e^{-l} \right) \\ E^{(-1)}(\varphi_0, \varphi_L, l) &\sim \frac{4m}{\beta^2} \left(2 - \cos \varphi_0 + \cos \varphi_L + 8 \tan \frac{\varphi_0}{2} \tan \frac{\pi - \varphi_L}{2} e^{-l} \right) \\ E^{(DN)}(\varphi_0, \mathcal{A}, l) &\sim \frac{4m}{\beta^2} \left(1 - \cos \varphi_0 - \mathcal{A}^{-1} - 4 \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} \frac{1 - \mathcal{A}^{-1}}{1 + \mathcal{A}^{-1}} e^{-2l} \right) \end{aligned} \tag{8.26}$$

Később látjuk majd, hogy ezek a kifejezések valóban megegyeznek a kvantumelmélet vákuumának vezető végesméret korrekciójával.



8.9. ábra. Dirichlet vákuumállapotok véges térfogatban

8.4. Reflexiós faktor és peremállapot formalizmus tetszőleges dimenzióban

Tekintsük Φ_i , $i = 1, \dots, n$ skalár mezők euklidészi kvantumtérelméletét $D + 1$ dimenziós fél tér-időn, amit az $(x \leq 0, y, \vec{r})$ koordinátákkal adunk meg, egy $x = 0$ -nál lokalizált peremfeltétel mellett. A korrelációs függvényeket a

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1, y_1, \vec{r}_1) \dots \Phi_{i_N}(x_N, y_N, \vec{r}_N) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi_{i_1}(x_1, y_1, \vec{r}_1) \dots \Phi_{i_N}(x_N, y_N, \vec{r}_N) e^{-S[\Phi]}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]}} \quad (8.27)$$

funkcionálintegrál definiálja, ahol a mértéket a

$$S[\Phi] = \int d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\int_{-\infty}^0 dx \left(\frac{1}{2}(\partial_x \vec{\Phi})^2 + \frac{1}{2}(\partial_y \vec{\Phi})^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\vec{r}} \vec{\Phi})^2 + U(\vec{\Phi}) \right) + U_B(\vec{\Phi}(x=0, y, \vec{r})) \right]$$

klasszikus hatás adja meg, amely a mozgásegyenletek mellett a határfeltételeket is magában foglalja:

$$\partial_x \Phi_i|_{x=0} = -\frac{\partial U_B}{\partial \Phi_i} \Big|_{x=0}$$

A fenti euklidészi kvantumtérelmélet két különböző Minkowski téridőben definiált kvantumtérelmélet imaginárius idejű verziójaként is felfogható.

1. Ha az imaginárius idő: $y = it$, akkor a perem térben lokalizált: ezt *nyílt csatornának* nevezzük. Az egyidejű csererelációk:

$$[\Phi_j(x, t, \vec{r}), \partial_t \Phi_k(x', t, \vec{r}')] = i\delta_{jk}\delta(x - x')\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad ; \quad x, x' < 0$$

Az állapottér a peremen adott határfeltételt kielégítő állapotokat tartalmazza, és a $|0\rangle_B$ peremes vákuumon az aszimptotikus részecskéket keltő operátorral lehet felépíteni⁶. Az aszimptotikus múltban a részecskék a perem felé kell mozogjanak, ezért a Hilbert-tér az *in*-állapotokkal a következő alakban írható fel:

$$\mathcal{H}_B = \left\{ a_{b_1}^\dagger(k_1, \vec{k}_1)_{in} \dots a_{b_N}^\dagger(k_N, \vec{k}_N)_{in} |0\rangle_B \quad , \quad k_i > 0, i = 1, \dots, N \right\}$$

(b_1, \dots, b_N a részecskék típusát jelöli) ahol az $a_{in}^{b\dagger}(k, \vec{k})$ operátor kielégíti a

$$[a_b(k, \vec{k})_{in}, a_c^\dagger(k', \vec{k}')_{in}] = (2\pi)^D \delta_{bc} \omega_b(k, \vec{k}) \delta(k - k') \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad ; \quad k, k' > 0 \quad (8.28)$$

csererelációt és egy m_b tömegű aszimptotikus részecskét kelt a peremre merőleges (transzverzális) k és a peremmel párhuzamos (paralel) \vec{k} impulzussal, amelynek energiája $\omega_b(k, \vec{k}) = \sqrt{k^2 + \vec{k}^2 + m_b^2}$. Az *out* állapotok alakja

$$a_{b_1}^\dagger(k_1, \vec{k}_1)_{out} \dots a_{b_N}^\dagger(k_N, \vec{k}_N)_{out} |0\rangle_B \quad , \quad k_i < 0, i = 1, \dots, N$$

az *in* állapotok (8.28) csererelációjához hasonlóan normáltak, és ugyancsak teljes rendszert alkotnak a Hilbert-térben. A szórást a

$$R_{\alpha\beta} = {}^{out}_B \langle \alpha | \beta \rangle^{in}_B$$

unitér *reflexiós mátrix* adja meg (ami a szokásos S mátrix megfelelője). A legegyszerűbb amplitúdó az egyrészecske reflexiós folyamatot írja le:

$$R_b^c(\omega, \vec{k}) (2\pi)^D \omega \delta(\omega - \omega') \delta^{(D-1)}(\vec{k} - \vec{k}') = {}_B \langle 0 | a_c(k', \vec{k}')_{out} a_b^\dagger(k, \vec{k})_{in} | 0 \rangle_B \quad (8.29)$$

⁶ Be lehet vezetni a peremre lokalizált részecskeszerű gerjesztéseket is [BBT04], de az egyszerűség kedvéért ezzel itt nem foglalkozom.

ahol az energia és a parallel impulzus megmaradását az eltolásinvariancia biztosítja, és a reflexiós amplitúdó a peremmel párhuzamos irányokban fennálló forgásinvariancia miatt csak $|\vec{k}|$ -től függ. A fenti amplitúdót *reflexiós faktornak* fogom nevezni: ez a szóhasználat az $1+1$ dimenziós integrálható modellekre a korábbiakban használt fogalom természetes kiterjesztése. A Heisenberg képbeli időfejlődést

$$\Phi_i(x, t, \vec{r}) = e^{iH_B t} \Phi_i(x, 0, \vec{r}) e^{-iH_B t}$$

a

$$H_B = \int d\vec{r} \left[\int_{-\infty}^0 dx \left(\frac{1}{2} \vec{\Phi}_t^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \vec{\Phi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_{\vec{r}} \vec{\Phi})^2 + U(\vec{\Phi}) \right) + U_B(\vec{\Phi}(x=0)) \right]$$

peremes Hamilton operátor adja meg és a (A.1) korrelátor a t szerint időrendezett operátorok szorzatának vákuum várható értékével egyezik meg:

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1, y_1, \vec{r}_1) \dots \Phi_{i_N}(x_N, y_N, \vec{r}_N) \rangle = {}_B \langle 0 | T_t (\Phi_{i_1}(x_1, t_1, \vec{r}_1) \dots \Phi_{i_N}(x_N, t_N, \vec{r}_N)) | 0 \rangle_B$$

ahol a $|0\rangle_B$ vákuumot 1-re normáljuk.

2. Ha ellenben $x = i\tau$ az imaginárius idő, akkor a perem időben lokalizált, a rendszer maga a szokásos végtelen térfogatban adott: ez az ún. *zárt csatorna*⁷. A Hilbert-tér a szokásos alakú: az *in* sokrészesecske állapotok bázisában

$$\mathcal{H} = \left\{ A_{b_1}^\dagger(\kappa_1, \vec{k}_1)_{in} \dots A_{b_N}^\dagger(\kappa_N, \vec{k}_N)_{in} | 0 \rangle \right\}$$

ahol

$$[A_b(\kappa, \vec{k})_{in}, A_c^\dagger(\kappa', \vec{k}')_{in}] = (2\pi)^D \delta_{bc} \omega_b(\kappa, \vec{k}) \delta(\kappa - \kappa') \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Az időfejlődést

$$\Phi_i(\tau, y, \vec{r}) = e^{iH\tau} \Phi_i(0, y, \vec{r}) e^{-iH\tau}$$

a szokásos Hamilton operátor generálja:

$$H = \int d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{1}{2} \vec{\Phi}_\tau^2 + \frac{1}{2} (\partial_y \vec{\Phi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_{\vec{r}} \vec{\Phi})^2 + U(\vec{\Phi}) \right)$$

A perem egy időbeli végállapotként jelentkezik a (A.1) korrelátorban:

$$\langle \Phi_{i_1}(x_1, y_1, \vec{r}_1) \dots \Phi_{i_N}(x_N, y_N, \vec{r}_N) \rangle = \langle B | T_\tau (\Phi_{i_1}(\tau_1, y_1, \vec{r}_1) \dots \Phi_{i_N}(\tau_N, y_N, \vec{r}_N)) | 0 \rangle$$

A $\langle B |$ neve *peremállapot*, és a \mathcal{H} tér azon eleme⁸, amit a korrelátor két alternatív Hamiltoni kiértékelésének megegyezése definiál:

$$\langle B | T_\tau (\Phi_{i_1}(\tau_1, y_1, \vec{r}_1) \dots \Phi_{i_N}(\tau_N, y_N, \vec{r}_N)) | 0 \rangle = {}_B \langle 0 | T_t (\Phi_{i_1}(x_1, t_1, \vec{r}_1) \dots \Phi_{i_N}(x_N, t_N, \vec{r}_N)) | 0 \rangle_B$$

ahol $(i\tau, y) \equiv (x, it)$. Az aszimptotikus állapotok teljességét kihasználva felírható a következő kifejtés:

$$\langle B | = \langle 0 | \left\{ 1 + \bar{K}_1^b A_b^\dagger(0, 0)_{in} + \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{D-1} \omega_b(\kappa, \vec{k})} \bar{K}_2^{bc}(\kappa, \vec{k}) A_b^\dagger(-\kappa, -\vec{k})_{in} A_c^\dagger(\kappa, \vec{k})_{in} + \dots \right\} \quad (8.30)$$

amit a *peremállapot klaszter kifejtésének* nevezünk (eltolásinvariancia miatt csak zérus teljes impulzusú állapotok jelenhetnek meg benne). A felülvonás a K együtthatókon azt jelzi, hogy a fenti kifejtés a konjugált („bra”) peremállapotra vonatkozik.

⁷ A nyílt/zárt csatorna elnevezés a húrelméletből származik: a húr mozgását leíró, az $1+1$ dimenziós világlepedőn értelmezett elméletben a beágyazó téridő szempontjából nézve a két csatorna nyílt, illetve zárt hurok propagálásaként fogható fel.

⁸ Szigorúan véve a peremállapot hullámfüggvénye nem normálható, a Hilbert-tér vektoraival csupán tetszőleges pontossággal közelíthető.

A peremállapot első részletes tárgyalását Ghoshal és A. B. Zamolodchikov adta az 1+1 dimenziós peremes integrálható kvantumtérelméletek elméletét megalapozó munkájában [GZ94], ahol az integrálható esetre a peremállapotot zárt alakban megadták. Áttérve az 1 + 1 dimenzióban szokásos rapiditás paraméterezésre, a C.2.1 alatti jelölésekkel

$$|B\rangle = \exp\left(\tilde{g}_b A_b^\dagger(\theta=0) + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} K^{bc}(\theta) A_b^\dagger(\theta) A_c^\dagger(-\theta)\right) |0\rangle \quad (8.31)$$

ahol $|0\rangle$ a zárt csatorna vákuum állapota, és

$$K_2^{ab}(\kappa) = K^{ab}(\theta) = R_a^b\left(i\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

az $R_a^b(\theta)$ egyrészecske reflexiós faktorokkal kifejezve (itt feltettük, hogy a peremállapot szinglett, amennyiben ez nem teljesül, a megfelelő általánosítás a C.2.1 alatt leírtak alapján kézenfekvő). Ghoshal és Zamolodchikov az egyrészecske járulékot a reflexiós faktor $\theta = i\frac{\pi}{2}$ -nél vett reziduumával adta meg, a következő alakban:

$$K_1^a = \tilde{g}_a = g_a \quad , \quad \text{amennyiben} \quad R_a^a\left(\theta \sim i\frac{\pi}{2}\right) \sim \frac{i\frac{g_a^2}{2}}{\theta - i\frac{\pi}{2}} \quad (8.32)$$

Látni fogjuk majd azonban, hogy ez az összefüggés nem helytálló; további vizsgálataink egyik célja éppen a helyes összefüggés tisztázása lesz.

Nagyon könnyen látható, hogy az egyrészecske tag megjelenése a vákuum konfigurációval van kapcsolatban. Tegyük fel, hogy \mathcal{O}_a az A_a részecske interpoláló tere, azaz

$$\langle 0|\mathcal{O}_a(\tau, y, \vec{r})|A_b(\kappa, \vec{k})\rangle_{in} = \sqrt{\frac{Z_a}{2}} \delta_{ab} e^{-i\omega_a(\kappa, \vec{k})\tau} e^{i(\kappa y + \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (8.33)$$

ahol Z_a a megfelelő hullámfüggvény renormálási faktor (kanonikusan normált mezőre ismert, hogy $0 < Z_a \leq 1$). Ennek vákuum várható értéke (8.30) segítségével a következő alakba írható:

$${}_B\langle 0|\mathcal{O}_a(x, t, \vec{r})|0\rangle_B = \langle 0|\mathcal{O}_a|0\rangle + \sqrt{\frac{Z_a}{2}} \tilde{g}_a e^{m_a x} + \mathcal{O}(e^{2m_x})$$

ahol $\langle 0|\Phi|0\rangle$ a szokásos (perem nélküli) vákuum várható érték. Amennyiben bevezetjük a \bar{g}_a paramétert a

$${}_B\langle 0|\mathcal{O}_a(x, t, \vec{r})|0\rangle_B = \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle + \bar{g}_a e^{m_a x} + \dots \quad (8.34)$$

alakban, akkor ez a következő összefüggésre vezet:

$$\bar{g}_a = \sqrt{\frac{Z}{2}} \tilde{g}_a \quad (8.35)$$

amit [BPT06a]-ban a Lehmann-Symanzik-Zimmermann-féle redukciós formalizmus peremes ki-terjesztését használva is beláttunk.

A peremes LSZ formulákkal a K^2 együtttható is kifejezhető az egyrészecske reflexiós faktorral. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak egy skalármező elméletével foglalkozom, és egyetlen részecskét tételezünk fel a spektrumban, így az i, b indexeket elhagyom. Érdemes bevezetni az

$$m_{\text{eff}}(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$$

paraméterezést, amivel a zárt csatornában κ, \vec{k} impulzusú részecskére a következő alakú rapiditás paraméterezés írható fel:

$$\omega = m_{\text{eff}}(\vec{k}) \cosh \theta \quad , \quad \kappa = m_{\text{eff}}(\vec{k}) \sinh \theta$$

A nyílt csatornában pedig a megfelelő rapiditás paraméterezés alakja:

$$\omega = m_{\text{eff}}(\vec{k}) \cosh \theta \quad , \quad k = m_{\text{eff}}(\vec{k}) \sinh \theta$$

(az $1 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletekben szokásos jelölést használva, a két csatorna rapiditás paramétere között nem tettem különbséget). A nyílt csatornában definiált (8.29) reflexiós együtthatót ekkor tekinthetjük úgy, mint θ és \vec{k} függvényét. A peremmel párhuzamos irányokban fennálló forgási invariancia miatt csak $|\vec{k}|$ függvénye lehet, és ezt helyettesíthetjük az $m_{a,\text{eff}}(\vec{k})$ -től való függéssel:

$$R(\omega, \vec{k}) = R(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}))$$

A (8.30) klaszter kifejtés ekkor a következő alakba írható:

$$\langle B | = \langle 0 | \left\{ 1 + \bar{K}_1 A(\theta = 0, \vec{k} = 0)_{in} + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} \bar{K}_2(\theta, \vec{k}) A(-\theta, -\vec{k})_{in} A(\theta, \vec{k})_{in} + \dots \right\}$$

és a kétrészecske együtthatóra a peremes LSZ formulákkal a következő eredmény adódik [BPT06a]:

$$\bar{K}_2(\theta, \vec{k}) = R\left(\frac{i\pi}{2} + \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})\right) \Rightarrow K_2(\theta, \vec{k}) = R\left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})\right) \quad (8.36)$$

ami Ghoshal és Zamolodchikov (8.31) eredményének általánosítása tetszőleges dimenziós térelméletre, amelynek integrálhatóságát sem kell feltenni.

8.5. Vákuumállapot véges térfogatban: vezető korrekciók

Ebben a fejezetben végig $1 + 1$ dimenziós térelméletekkel foglalkozom, az általános esetre 8.6.2 alatt térek majd vissza.

8.5.1. Klaszter kifejtés

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a vizsgált (nem feltétlenül integrálható) peremes kvantumtérelmélet részecske spektruma egyetlen tömeges skalár gerjesztést tartalmaz. Jelöljük a véges L térfogat két peremén érvényes határfeltételeket α -val, illetve β -vel és tegyük fel, hogy a félegyenesen definiált rugalmas egyrészecske reflexiós amplitúdók, $R_\alpha(\theta)$ és $R_\beta(\theta)$ ismertek. Az (euklidészi) időirányban periodikus határfeltételeket feltételezve a rendszer partíciós függvénye – a zárt/nyílt csatornában érvényes Hamiltoni formalizmusnak megfelelően – két alternatív módon is reprezentálható:

$$Z_{\alpha\beta}(R, L) = \text{Tr} e^{-RH_{\alpha\beta}(L)} = \langle \alpha | e^{-LH(R)} | \beta \rangle$$

ahol $H(R)$ a Hamilton operátor a zárt csatornában (periodikus határfeltételek mellett), $|\alpha\rangle$ és $|\beta\rangle$ a megfelelő peremállapotok és $H_{\alpha\beta}(L)$ a nyílt csatorna Hamilton operátora α és β határfeltételek mellett. Az $R \rightarrow \infty$ határesetben

$$e^{-RE_{\alpha\beta}^0(L)} \sim \langle \alpha | e^{-LH(R)} | \beta \rangle$$

ahol a jobb oldalon álló kifejezés egy teljes rendszer beszúrásával klaszter kifejtés alakjában írható fel⁹

$$\langle \alpha | e^{-LH(R)} | \beta \rangle = \sum_{n \in \mathcal{H}_c} \frac{\langle \alpha | n \rangle \langle n | \beta \rangle}{\langle n | n \rangle} e^{-LE_n(R)}$$

⁹ Ezt a klaszter kifejtést előzőleg Dorey és munkatársai is alkalmazták az ún. peremes entrópiafüggvény kiszámítására [DFRT04].

ahol \mathcal{H}_c a zárt csatorna Hilbert-tere. Részletesebben felírva:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | e^{-LH(R)} | \beta \rangle &= \frac{\langle \alpha | 0 \rangle \langle 0 | \beta \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} e^{-LE_0(R)} \\
&+ \sum_{\theta_n} \frac{\langle \alpha | \theta_n \rangle \langle \theta_n | \beta \rangle}{\langle \theta_n | \theta_n \rangle} e^{-L(E_0(R) + m \cosh \theta_n)} \\
&+ \sum_{\theta_n, \theta_m} \frac{\langle \alpha | \theta_n, \theta_m \rangle \langle \theta_n, \theta_m | \beta \rangle}{\langle \theta_n, \theta_m | \theta_n, \theta_m \rangle} e^{-L(E_0(R) + m \cosh \theta_n + m \cosh \theta_m)} \\
&+ \text{magasabb részecske járulékok} + \dots
\end{aligned} \tag{8.37}$$

Először tételezzük fel, hogy nincsenek egyrészecske járulékok; ekkor az $R \rightarrow \infty$ határesetben (8.36) alapján

$$| \beta \rangle = \left(1 + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} K_\beta(\theta) A^\dagger(-\theta) A^\dagger(\theta) + \dots \right) | 0 \rangle \tag{8.38}$$

(hasonló kifejezés írható $| \alpha \rangle$ -ra), ahol

$$K_\beta(\theta) = R_\beta \left(\frac{i\pi}{2} - \theta \right)$$

Az állapot összegzést integrállal helyettesítve:

$$\sum_{\theta_n} \rightarrow mR \int \frac{d\theta}{2\pi} \cosh \theta$$

az energia vezető korrekciója nagy térfogatban:

$$E_{\alpha\beta}(L) = -m \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} \cosh \theta \bar{K}_\alpha(\theta) K_\beta(\theta) e^{-2mL \cosh \theta} \tag{8.39}$$

Integrálható elmélet esetén (8.31) felhasználásával

$$| B \rangle = \exp \left(1 + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} K(\theta) A^\dagger(\theta) A^\dagger(-\theta) \right) | 0 \rangle$$

A 8.1.3 alatt tárgyalt peremes TBA egyenletet LeClair és munkatársai pontosan a klaszter kifejtés teljes felösszegzésével származtatta, és jól ismert, hogy a peremes TBA egyenlet megoldása nagy térfogatban éppen (8.39)-t adja.

Egyrészecske járulék jelenlétében azonban (8.31)

$$| \beta \rangle = \left(1 + \tilde{g}_\beta A^\dagger(0) + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} K_\beta(\theta) A^\dagger(-\theta) A^\dagger(\theta) + \dots \right) | 0 \rangle$$

Ghoshal és Zamolodchikov a \tilde{g}_β együtthatót a reflexiós faktor (8.32) pólusát jellemző g_β mennyiséggel azonosította. Azonban Dorey és munkatársai egy pont függvényeket számoltak a peremállapot kifejtése alapján form-faktor kifejtésben, és ezeket a peremes TCSA eredményeivel (numerikusan) összehasonlítva a következő összefüggést találták [DPTW01]:

$$\tilde{g}_\beta = \frac{g_\beta}{2} \tag{8.40}$$

A következőkben megmutatjuk, hogy ez a reláció valóban helytálló, és kiterjesztjük nemintegrálható elméletekre, valamint általános téridő dimenzióra is. A klaszter kifejtést alkalmazva

$$Z_{\alpha\beta}(R, L) = 1 + mR \tilde{g}_\alpha \tilde{g}_\beta e^{-mL} + \dots$$

és (8.40)-t használva:

$$E_{\alpha\beta}(L) = -m \frac{g_\alpha g_\beta}{4} e^{-mL} + \dots \quad (8.41)$$

A (8.39,8.41) eredményeket peremes Lüscher-formuláknak nevezzük, mivel ezek a periodikus határfeltételekre érvényes (2.2) tömegkorrekciókkal analóg kifejezések, mégpedig (8.39) éppen az F -tag, (8.41) pedig a μ -tag megfelelőjének tekinthető. Vegyük észre, hogy ezek a formulák itt a vákuumra vonatkoznak; a periodikus határfeltételek esetével szemben, a peremes esetben az egyrészecske állapotokkal már $1/L$ -ben hatványszerűen viselkedő korrekciókat mutatnak a (8.4) peremes Bethe-Yang egyenletek alapján.

Megjegyezzük, hogy amennyiben $g_\alpha g_\beta \neq 0$, akkor a kétrészecske járulék (8.39) alatti naív alakjában az integrál szinguláris; a következőkben látni fogjuk (bár csak az integrálható esetre), hogyan lehet ekkor szisztematikus módon reguláris kifejtést kapni¹⁰.

8.5.2. A peremes TBA infravörös kifejtése

A (8.40) relációt alátámasztandó, a következőkben levezetem a peremes TBA egyenlet infravörös sorfejtését, ami önmagában is érdekes, mivel ez korábban nem volt ismert arra az esetre, ha az egyrészecske csatolások nem tűnnek el. Habár a LeClair és munkatársai által megadott levezetés [LMSS95] csak arra az esetre vonatkozik, ha az egyrészecske csatolások nincsenek jelen, nagyon könnyen látható, hogy (legalábbis naívan, ld. lentebb) akkor is érvényben marad, ha ezek nem tűnnek el, és Dorey és munkatársai valóban sikeresen alkalmazták a (8.7) egyenleteket a peremes Lee-Yang modell keretében olyan határfeltételekre, ahol $\tilde{g} \neq 0$ [DPTW98].

Az alábbiakban egyszerűség kedvéért feltételezem, hogy a spektrum egyetlen skalár részecskét tartalmaz. Ebben az esetben a peremes TBA egyenlet alakja:

$$\epsilon(\theta) = 2mL \cosh \theta - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \phi(\theta - \theta') \log \left(1 + \chi(\theta') e^{-\epsilon(\theta')} \right) \quad (8.42)$$

$$E_{\alpha\beta}(L) = -m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \log \left(1 + \chi(\theta) e^{-\epsilon(\theta)} \right) \quad (8.43)$$

ahol

$$\phi(\theta) = -i \frac{d}{d\theta} \log S(\theta) \quad , \quad \chi(\theta) = \bar{K}_\alpha(\theta) K_\beta(\theta)$$

és a (C.27) keresztezési unitaritást felhasználva látható, hogy $\chi(\theta)$ θ páros függvénye. χ egyetlen lehetséges szingularitása a valós tengelyen $\theta = 0$ -nál van, az

$$R_\alpha(\theta) \sim \frac{ig_\alpha^2}{2\theta - i\pi} \Rightarrow K_\alpha(\theta) \sim -i \frac{g_\alpha^2}{2\theta} \quad , \quad \bar{K}_\alpha(\theta) \sim +i \frac{g_\alpha^2}{2\theta}$$

összefüggésnek megfelelően. Amennyiben a két perem közül legalább az egyik az egyrészecske csatolás eltűnik ($g_\alpha g_\beta = 0$) akkor $\chi(\theta)$ θ reguláris függvénye. Ugyanis kölcsönható integrálható kvantumtérelméletben mindig fennáll, hogy

$$S(0) = -1$$

és a (C.27) keresztezési unitaritásból

$$K_\alpha(0) = -K_\alpha(0)$$

azaz K -nak vagy pólusa, vagy zérusa van $\theta = 0$ -nál, ezért χ -nek csak akkor van (másodrendű) pólusa, ha mindkét K szinguláris. Ezt felhasználva nagy L -re

$$\epsilon(\theta) = 2mL \cosh \theta + O(e^{-2mL}) \quad (8.44)$$

¹⁰ Általános (nemintegrálható esetben) ez a kérdés még további tisztázásra szorul.

ahonnan:

$$E_{\alpha\beta}(L) = -m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh(\theta) \chi(\theta) e^{-2mL \cosh \theta} + O(e^{-4mL})$$

ami konzisztens a (8.39) peremes Lüscher formulával.

Azonban ha $g_\alpha g_\beta \neq 0$, a fenti gondolatmenet naív alkalmazása divergens eredményre vezet, mert $\theta = 0$ körül nem teljesül a logaritmus sorba fejtésének feltétele. Ilyenkor óvatosabban kell eljárni: az aszimptotikus viselkedést az

$$E_{\alpha\beta}(L) = -m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \log \left(1 + \chi(\theta) e^{-2mL \cosh \theta} \right) \quad (8.45)$$

alakban felírva és a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \log \frac{a^2 + x^2}{b^2 + x^2} = 2\pi(a - b) \quad , a, b \geq 0 \quad (8.46)$$

integrálformulát alkalmazva, a következő eredményt kapjuk

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}(L) &= -m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \left[\log \left(1 + \frac{g_\alpha^2 g_\beta^2}{4 \sinh^2 \theta} e^{-2mL} \right) + \log \left(\frac{1 + \chi(\theta) e^{-2mL \cosh \theta}}{1 + \frac{g_\alpha^2 g_\beta^2}{4 \sinh^2 \theta} e^{-2mL}} \right) \right] \\ &= -m \frac{|g_\alpha g_\beta|}{4} e^{-mL} - m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \left[\log \left(\frac{1 + \chi(\theta) e^{-2mL \cosh \theta}}{1 + \frac{g_\alpha^2 g_\beta^2}{4 \sinh^2 \theta} e^{-2mL}} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.47)$$

ahol a második tag e^{-2mL} nagyságrendű, és az integrál alatti logaritmus teljesen reguláris hatványsorba fejtésével aszimptotikus sorfejtése nagy térfogatban tetszőleges rendig előállítható, míg a vezető tag konzisztens a (8.40, 8.41) eredményekkel, ha $g_\alpha g_\beta > 0$. Már Dorey és munkatársai észrevették [DPTW98] (a peremes TCSA-val való összehasonlítás alapján), hogy a peremes TBA egyenlet csak ebben az esetben egyezik a korrekt alapállapottal, és a $g_\alpha g_\beta < 0$ esetben megfelelő analitikus elfolytatásra van szükség. Ennek a diszkusszióját Bajnok Zoltánnal és Palla Lászlóval közös munkánkból idézem [BPT06a]. Az elfolytatás eredménye, hogy az alapállapotot leíró TBA egyenlet helyes alakja ekkor

$$E_{\alpha\beta}(L) = m \sin u - m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \log \left(1 + \chi(\theta) e^{-\epsilon(\theta)} \right)$$

ahol $\epsilon(\theta)$ az

$$\epsilon(\theta) = 2mL \cosh \theta - \log \frac{S(\theta - iu)}{S(\theta + iu)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Phi(\theta - \theta') \log \left(1 + \chi(\theta') e^{-\epsilon(\theta')} \right) \quad (8.48)$$

egyenlet megoldása, u -t pedig

$$\bar{K}_\beta(iu) K_\alpha(iu) e^{-\epsilon(iu)} = -1$$

határozza meg. Nagy L -re $\epsilon(\theta) = 2mL \cosh \theta$ ahonnan $\sin u \sim u \sim \frac{|g_\alpha g_\beta|}{2} e^{-mL}$ és ekkor

$$E_{\alpha\beta}(L) = -m \frac{g_\alpha g_\beta}{4} e^{-mL} + \dots$$

vagyis az egyezés ebben az esetben is tökéletes.

A fentiek azt jelentik, hogy LeClair és munkatársai levezetésének naív kiterjesztése valójában csak a $g_\alpha g_\beta > 0$ esetben működik, aminek részletes elemzésére itt most nem térek ki.

8.5.3. A peremes Lüscher-formula alkalmazása a sine-Gordon modellre

A peremes perturbált konform térelméleti keretben a modell hatása

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{pCFT}} = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^0 dx \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \Phi(x, t))^2 + \mu \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^0 dx : \cos \beta \Phi : \\ & + \tilde{\mu}_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt : \cos \frac{\beta}{2} (\Phi(0, t) - \Phi_0) : + \tilde{\mu}_L \int_{-\infty}^{\infty} dt : \cos \frac{\beta}{2} (\Phi(L, t) - \Phi_L) : \end{aligned} \quad (8.49)$$

A két peremen a reflexiót a alatti leírt egzakt reflexiók faktorok adják meg, amelyek η_z, ϑ_z ($z = 0, L$) paraméterei (C.33) alapján a következőképpen függenek össze a hatásban szereplő paraméterekkel:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mu}_z}{\tilde{\mu}_{\text{crit}}} \sin \frac{\beta \Phi_z}{2} &= -(-1)^{z/L} \sin \frac{\eta_z}{\lambda + 1} \sinh \frac{\vartheta_z}{\lambda + 1} \\ \frac{\tilde{\mu}_z}{\tilde{\mu}_{\text{crit}}} \cos \frac{\beta \Phi_z}{2} &= \cos \frac{\eta_z}{\lambda + 1} \cosh \frac{\vartheta_z}{\lambda + 1} \end{aligned} \quad (8.50)$$

ahol

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2\mu}{\sin \frac{\beta^2}{8}}} \quad , \quad \lambda = \frac{8\pi}{\beta^2} - 1 \quad (8.51)$$

és a $-(-1)^{z/L}$ faktor abból ered, hogy a bal peremen ($z = 0$) a szoliton/antiszoliton szerepe felcserélődik a jobb peremhez ($z = L$) képest.

$\beta^2 < 4\pi$ esetén a spektrumban megtalálható az első lélegző, aminek reflexiók faktora (C.31) alapján

$$R_{| \rangle}^{(1)}(\theta)_z = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2\lambda} + 1)(\frac{\eta_z}{\pi\lambda} - \frac{1}{2})(\frac{i\vartheta_z}{\pi\lambda} - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{2})(\frac{\eta_z}{\pi\lambda} + \frac{1}{2})(\frac{i\vartheta_z}{\pi\lambda} + \frac{1}{2})} \quad , \quad (x) = \frac{\sinh(\frac{\theta}{2} + i\frac{\pi x}{2})}{\sinh(\frac{\theta}{2} - i\frac{\pi x}{2})} \quad (8.52)$$

és $\theta = i\pi/2$ környezetében

$$R_{| \rangle}^{(1)}(\theta) \sim 4i \frac{1 + \cos \frac{\pi}{2\lambda} - \sin \frac{\pi}{2\lambda}}{1 - \cos \frac{\pi}{2\lambda} + \sin \frac{\pi}{2\lambda}} \tan^2 \frac{\eta}{2\lambda} \tanh^2 \frac{\vartheta}{2\lambda} \frac{1}{2\theta - i\pi}$$

ahonnan B_1 egyrészecske csatolása

$$g_1(\eta, \vartheta) = 2\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2\lambda} - \sin \frac{\pi}{2\lambda}}{1 - \cos \frac{\pi}{2\lambda} + \sin \frac{\pi}{2\lambda}}} \tan \frac{\eta}{2\lambda} \tanh \frac{\vartheta}{2\lambda} \quad (8.53)$$

Ez érvényes akkor, ha a perem a jobbszáron található (mint a félvégtelen esetben). Azonban a balszáron található perem esetén figyelembe kell venni, hogy B_1 a tértükrözésre páratlan, ezért egy extra negatív előjel jelenik meg. Ennek megfelelően (8.41)-ből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}(L) &= -\frac{1}{4} m_1 g_1(\eta_L, \vartheta_L) (-g_1(\eta_0, \vartheta_0)) e^{-m_1 L} \\ &= m_1 \frac{1 + \cos \frac{\pi}{2\lambda} - \sin \frac{\pi}{2\lambda}}{1 - \cos \frac{\pi}{2\lambda} + \sin \frac{\pi}{2\lambda}} \tan \frac{\eta_0}{2\lambda} \tanh \frac{\vartheta_0}{2\lambda} \tan \frac{\eta_L}{2\lambda} \tanh \frac{\vartheta_L}{2\lambda} e^{-m_1 L} + \dots \end{aligned} \quad (8.54)$$

A szolitonokból adódó korrekciók mindig kisebbek, mivel a szolitonoknak nincs egyrészecske csatolásuk a peremhez és $m_1 < 2M$.

Amennyiben a B_2 második lélegző is létezik ($\beta^2 < 8\pi/3$) akkor

$$m_2 = 2m_1 \cos \frac{\pi}{2\lambda} < 2m_1$$

amit jelent, hogy a B_2 által adott egyrészecske korrekció nagyobb, mint a B_1 által adott kétrészecske tag (ezen felül az is igaz, hogy $m_2 < 2M$). Ezenfelül, ha az η_z, ϑ_z ($z = 0, L$) bármelyike

eltűnik, akkor (8.54) eltűnik és ekkor a vezető korrekciót B_2 egyrészezske járuléka adja. B_2 reflexiós együttthatója:

$$R_{|)}^{(2)}(\theta) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\lambda} + 1\right)\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)\left(\frac{1}{2\lambda}\right)}{\left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{2}\right)} \times \frac{\left(\frac{\eta_z}{\pi\lambda} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}\right)\left(\frac{i\vartheta_z}{\pi\lambda} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}\right)\left(\frac{\eta_z}{\pi\lambda} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right)\left(\frac{i\vartheta_z}{\pi\lambda} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right)}{\left(\frac{\eta_z}{\pi\lambda} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}\right)\left(\frac{i\vartheta_z}{\pi\lambda} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}\right)\left(\frac{\eta_z}{\pi\lambda} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right)\left(\frac{i\vartheta_z}{\pi\lambda} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right)} \quad (8.55)$$

ahonnan

$$g_2(\eta, \vartheta) = \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{4\lambda} - \frac{\eta}{2\lambda}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4\lambda} + \frac{\eta}{2\lambda}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4\lambda} - \frac{i\vartheta}{2\lambda}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4\lambda} + \frac{i\vartheta}{2\lambda}\right)}{\tan\frac{\pi}{4\lambda} \sqrt{\tan\frac{\pi}{2\lambda} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2\lambda}\right)}} \quad (8.56)$$

és ebből B_2 egyrészezske járuléka:

$$-m_2 \frac{g_2(\eta_0, \vartheta_0)}{2} \frac{g_2(\eta_L, \vartheta_L)}{2} e^{-m_2 L} \quad (8.57)$$

(ahol felhasználtam, hogy B_2 páros). A $\vartheta \rightarrow \infty$ határesetben (azaz Dirichlet határfeltételekre) pedig:

$$g_1(\eta, \infty) = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{2\lambda} - \sin\frac{\pi}{2\lambda}}{1 - \cos\frac{\pi}{2\lambda} + \sin\frac{\pi}{2\lambda}}} \tan\frac{\eta}{2\lambda}$$

$$g_2(\eta, \infty) = \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{4\lambda} - \frac{\eta}{2\lambda}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4\lambda} + \frac{\eta}{2\lambda}\right)}{\tan\frac{\pi}{4\lambda} \sqrt{\tan\frac{\pi}{2\lambda} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2\lambda}\right)}} \quad (8.58)$$

8.5.3.1. Összehasonlítás a peremes DdV egyenlettel

Ezeket az eredményeket összevethetjük a sine-Gordon modellre Dirichlet határfeltételek mellett felírt DdV egyenlettel, amit a két peremen azonos határfeltételek esetére ($\Phi_0 = \Phi_L$) LeClair és munkatársai származtattak le [LMSS95], és a $\Phi_0 \neq \Phi_L$ esetre Ahn, Bellacosa és Ravanini általánosított [ABR04]. Az egyenlet alakja¹¹:

$$Z(\theta) = 2ML \sinh \theta + P(\theta | H_0, H_L) - i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x - i\eta) \log\left(1 - e^{iZ(x+i\eta)}\right) + i \int_{-\infty}^{\infty} dx G(\theta - x + i\eta) \log\left(1 - e^{iZ(x-i\eta)}\right) \quad (8.59)$$

ahol

$$P(\theta | H_0, H_L) = 2\pi \int_0^\theta dx (F(x, H_0) + F(x, H_L) + G(x) + J(x))$$

$$G(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\theta} \frac{\sinh\left(\frac{\pi(1-\lambda)}{2\lambda}k\right)}{2 \sinh\frac{\pi}{2\lambda}k \cosh\frac{\pi}{2}k}$$

$$J(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\theta} \frac{\sinh\left(\frac{\pi(1-\lambda)}{4\lambda}k\right) \cosh\left(\frac{\pi(1+\lambda)}{4\lambda}k\right)}{\sinh\frac{\pi}{2\lambda}k \cosh\frac{\pi}{2}k}$$

$$F(\theta, H) = \text{sign}(H) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\theta} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda} - H\right)k\right)}{2 \sinh\frac{\pi}{2\lambda}k \cosh\frac{\pi}{2}k}$$

és

$$H_0 = \frac{1 - \frac{8}{\beta}\Phi_0}{\lambda}, \quad H_L = \frac{1 + \frac{8}{\beta}\Phi_L}{\lambda}$$

¹¹ A levezetés kiindulópontja a (6.2) fénykúp rács Bethe Ansatz általánosítása arra az esetre, amikor a rendszer nyílt, és a spinlánc két végén nemzérus külső mágneses tér van.

(az egyenlet fenti alakja $0 < H_{0,L} < 1 + \lambda^{-1}$ esetén érvényes). Az energia pedig

$$E(L) = -M \Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \sinh(x + i\eta) \log \left(1 - e^{iZ(x+i\eta)} \right) \quad (8.60)$$

és úgy van normálva, hogy

$$E(L) \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad L \rightarrow \infty$$

Ennek megfelelően a perturbált konform térelmélet vákuum energiája a DdV egyenletből adódó eredménnyel (a (6.53) után tárgyalattakkal analóg módon) a következőképpen fejezhető ki:

$$E_{\text{PCT}}(L) = E_{\text{DdV}}(L) + \mathcal{B}M^2L + E_b(\eta_0) + E_b(\eta_L)$$

ahol \mathcal{B} a (6.53) univerzális vákuumenergia konstans és $E_b(\eta)$ a (C.34) peremes energiajárulék. Ezzel szemben viszont (8.60) pontosan úgy normált, hogy közvetlenül összehasonlítható a peremes Lüscher formulával.

A $\lambda < 1$ taszító tartományban

$$Z(\theta) = 2ML \sinh \theta + P(\theta | H_0, H_L)$$

Ezt behelyettesítve (8.60)-be és az $\eta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ határesetet véve:

$$E = -M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \left(K_{\alpha}^{s\bar{s}}(-\theta) K_{\beta}^{\bar{s}s}(\theta) + K_{\alpha}^{\bar{s}s}(-\theta) K_{\beta}^{s\bar{s}}(\theta) \right) e^{-2ML \cosh \theta} \quad (8.61)$$

ahol

$$K_{\beta}^{s\bar{s}}(\theta) = R_{\alpha} \left(i\frac{\pi}{2} - \theta \right)_s^s, \quad K_{\beta}^{\bar{s}s}(\theta) = R_{\beta} \left(i\frac{\pi}{2} - \theta \right)_{\bar{s}}^{\bar{s}}$$

a (C.30) reflexiós faktorokkal kifejezve. Ez pontosan megegyezik a (8.39) alatti eredménnyel¹².

A fenti eljárás a vonzó tartományban nem működik, mert a Z függvény analiticitási tartománya nem teszi lehetővé az $\eta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ határeset (legalábbis a fenti egyszerű módon történő) elvégzését. A részletes elemzés helyett inkább numerikus összehasonlítást alkalmazok a továbbiakban, mivel a DdV egyenlet numerikus iteratív megoldása igen gyorsan és nagy pontossággal konvergál. A 8.10 ábrán mutatok be egy példát, ahol $\lambda = 4$ mellett $\log(|E|/M)$ -et ábrázoltam $l = ML$ függvényében. A Φ_z , $z = 0$, L peremértékeket

$$\Phi_z = \frac{2\pi}{\beta} \varphi_z$$

alakban parametrizálva:

$$\eta_z = -(-1)^{z/L} \pi(1 + \lambda) \varphi_z$$

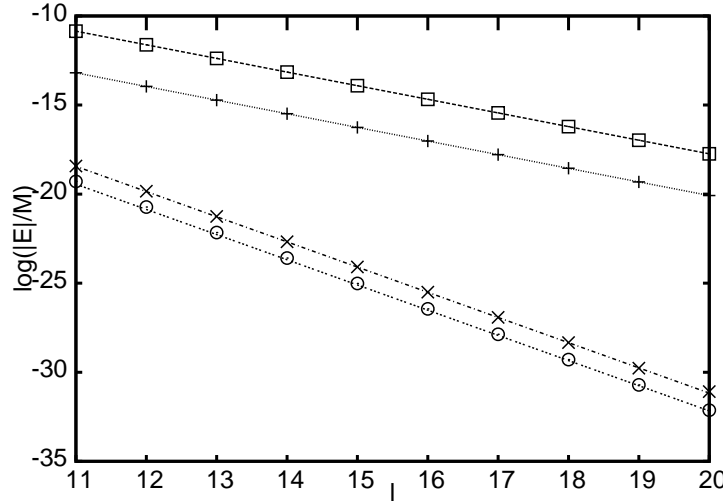
Az eredmények meggyőzően alátámasztják a klaszter kifejtés révén kapott (8.41) egyrészecske korrekció érvényességét és ezzel együtt a (8.40) relációt.

8.5.3.2. Klasszikus határeset

Az alábbiakban megmutatom, hogy a (8.26) alatt adott klasszikus aszimptotikus kifejezések pontosan megegyeznek a peremes Lüscher formulák klasszikus határesetével. Nagyon fontos észrevenni, hogy a (8.63)-nak megfelelő klasszikus határeset nem egyszerűen $\beta \rightarrow 0$: ebben az esetben szinte minden érdekes mennyiség divergensnek adódna. Az alapállapot szemiklasszikus kifejtése a következőképpen fejezhető ki euklidészi pályaintegrállal:

$$E(L) = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{\hbar T} \log \int D\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau L_E(\Phi) \right\}$$

¹² A Dirichlet határfeltétel esetén szoliton szolitonként, antiszoliton pedig antiszolitonként verődik vissza, ezért a korrekció éppen két (a szolitonhoz, illetve antiszolitonhoz tartozó) járulék összege.



8.10. ábra. A Dirichlet DdV összehasonlítása a peremes Lüscher formulákkal nagy térfogatban, $\lambda = 4$ mellett. DdV eredmények: \square : $\varphi_0 = -0.17$, $\varphi_L = 0.1$, $+$: $\varphi_0 = 0.017$, $\varphi_L = 0.1$, \times : $\varphi_0 = 0$, $\varphi_L = 0$, \odot : $\varphi_0 = -0.08$, $\varphi_L = 0$. A felső két vonal a (8.54) B_1 egyrészecske korrekciót, az alsó kettő a B_2 egyrészecske járulékát mutatja.

ahol a (8.19) hatásnak megfelelően

$$L_E(\Phi) = \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} (\partial_\tau \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \Phi)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} \cos \beta \Phi \right) + M_L \left[1 - \cos \frac{\beta}{2} (\Phi(L, \tau) - \Phi_L) \right] + M_0 \left[1 - \cos \frac{\beta}{2} (\Phi(0, \tau) - \Phi_0) \right]$$

A csatolási állandót kiskálázva és dimenziótlanítva

$$\Phi = \beta \bar{\Phi} \quad , \quad \bar{x} = mx \quad , \quad \bar{\tau} = m\tau$$

a standard módon elvégzett szemiklasszikus kifejtés eredménye

$$E(L) = \frac{m}{\beta^2} \left(F \left(mL, \frac{M_0 \beta^2}{m}, \frac{M_L \beta^2}{m}, \beta \Phi_0, \beta \Phi_L \right) + O(\hbar \beta^2) \right) \quad (8.62)$$

ahol F változóinak dimenziótlan függvénye. Az első tag a klasszikus energia, ami β^{-2} rendű, az összes kvantumkorrekciók pedig $\beta \rightarrow 0$ -ban regulárisak: a \hbar szerinti kifejtés azonos a β^2 szerintivel. Ezek szerint a klasszikus határeset nem más, mint a vezető β^{-2} tag a $\beta = 0$ körüli kifejtésben. Fontos észrevenni, hogy azok a mennyiségek, amiket fixen kell tartani a klasszikus határesetben, éppen F argumentumai:

$$mL, \frac{M_0 \beta^2}{m}, \frac{M_L \beta^2}{m}, \beta \Phi_0, \beta \Phi_L$$

valamint m . A (8.26) végesméret korrekciók térfogatfüggéséből megtudhatjuk¹³, honnan jön a megfelelő járulék: e^{-l} esetén a B_1 egyrészecske járuléka, e^{-2l} esetén pedig – legalábbis naívan – B_2 -é (a klasszikus határesetben $m_2 = 2m_1 = 2m$).

A klasszikus hatás (8.19) szerint

$$\mathcal{A}_{\text{class}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{m^2}{\beta^2} (\cos \beta \Phi - 1) \right) + M_L \left(\cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=0) - \Phi_L) - 1 \right) + M_0 \left(\cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=L) - \Phi_0) - 1 \right) \right\}$$

¹³ Emlékezzünk, hogy $l = mL$.

amelynek paraméterei a (8.49) perturbált konform térelméleti leírás paramétereivel a $\beta \rightarrow 0$ klasszikus határesetben

$$\tilde{\mu}_z \rightarrow M \quad , \quad \mu \rightarrow \frac{m^2}{\beta^2}$$

alapján azonosíthatók, a reflexiós faktor paramétereit pedig a következőképpen skálázzuk:

$$\eta = \eta_{\text{cl}} (1 + \lambda) \quad , \quad \vartheta = \vartheta_{\text{cl}} (1 + \lambda) \quad (8.63)$$

ahol η_{cl} , ϑ_{cl} véges marad. Ebből a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{M_z}{M_{\text{crit}}} \sin \frac{\beta \Phi_z}{2} &= - (-1)^{z/L} \sin \eta_{\text{cl}} \sinh \vartheta_{\text{cl}} \\ \frac{M_z}{M_{\text{crit}}} \cos \frac{\beta \Phi_z}{2} &= \cos \eta_{\text{cl}} \cosh \vartheta_{\text{cl}} \\ M_{\text{crit}} &= \frac{4m}{\beta^2} \end{aligned} \quad (8.64)$$

A (8.50) összefüggések szerint a Dirichlet határfeltételnek $\vartheta \rightarrow \infty$ felel meg, a $\Phi_0 = 0$ perturbált Neumann határfeltételnek pedig $\vartheta = 0$ ($\mathcal{A}^{-1} < 1$) vagy $\eta = 0$ ($\mathcal{A}^{-1} > 1$). A klasszikus (8.64) relációból a esetben

$$\eta_{\text{cl},0} = -\varphi_0 = -\frac{\beta \Phi_0}{2} \quad , \quad \eta_{\text{cl},L} = \varphi_L = \frac{\beta \Phi_L}{2}$$

a perturbált Neumann esetben pedig

$$\cos \eta_{\text{cl}} = \mathcal{A}^{-1} \quad (\mathcal{A}^{-1} < 1) \quad , \quad \cosh \eta_{\text{cl}} = \mathcal{A}^{-1} \quad (\mathcal{A}^{-1} > 1)$$

adódik.

Ezzel a (8.54) B_1 egyrészecske tag klasszikus határesetére

$$-\frac{32m}{\beta^2} \tan \frac{\varphi_0}{2} \tan \frac{\varphi_L}{2} e^{-l}$$

adódik, ami megegyezik a (8.26) szerinti E_A értékkel. E_B egyszerűen megkapható, ha észrevesszük, hogy a kvantumelméletben az

$$\eta \rightarrow \bar{\eta} = \pi (\lambda + 1) - \eta \quad (8.65)$$

pontosan felcseréli az alapállapotot az első gerjesztett állapottal. A klasszikus határesetben ennek $\eta_{\text{cl}} \rightarrow \pi - \eta_{\text{cl}}$ felel meg, azaz éppen E_A és E_B -t cseréli fel. Hasonlóan látható, hogy $E^{(-1)}$ -re is egyezést kapunk.

Az e^{-2l} rendű korrekciók azonban nehezebb kérdésnek bizonyulnak. Pl. E_+ esetén a B_2 (8.57) egyrészecske járulékának klasszikus határeseté

$$\frac{32m}{\beta^2} \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} e^{-2l} \quad (8.66)$$

ami pont kétszer akkora, mint a megfelelő klasszikus formula (8.26) szerint.

Azonban itt emlékeznünk kell arra, hogy a klasszikus határesetben

$$m_1 = m \quad , \quad m_2 = 2m$$

vagyis a B_1 kétrészecske tagja is e^{-2l} korrekciót ad. A (8.39) kétrészecske járulékot átírhatjuk

$$-m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \bar{K}_\alpha(\theta) K_\beta(\theta) e^{-2mL \cosh \theta} = -m e^{-2mL} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} f(\theta) e^{-2mL \theta^2/2}$$

alakba, ahol

$$f(\theta) = \cosh \theta \bar{K}_\alpha(\theta) K_\beta(\theta) e^{-2mL(\cosh \theta - 1 - \theta^2/2)}$$

Mivel $f(\theta)$ páros:

$$f(\theta) = f_0 + f_1\theta^2 + \dots$$

és az integrált elvégezve

$$-\frac{m}{4\sqrt{\pi m L}} e^{-2mL} \left(f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2mL)^n} f_n \right) \quad (8.67)$$

Itt újabb probléma adódik, mert az e^{-2L} faktor mellett megjelenik egy $L^{-1/2}$ együttható is, tehát ennek alapján nem kapunk egyezést a klasszikus formulával. Ennek okát akkor láthatjuk, ha a (C.31) reflexiós faktorok behelyettesítése után elvégezzük a Taylor-sorfejtést:

$$f_n \sim \lambda^{2(n+1)} \sim \frac{1}{\beta^{4(n+1)}}$$

ami azt jelenti, hogy a (8.67) sorfejtés a klasszikus határesetben érvénytelen. Ezért az integrál kiszámításánál óvatosabban kell eljárunk. A probléma az, hogy mind

$$\chi(\theta) = \bar{K}_\alpha(\theta) K_\beta(\theta)$$

mind pedig az összes deriváltja divergens $\theta = 0$ -ban, ha $\beta \rightarrow 0$. A veszélyes járulék a (8.52) reflexiós faktor

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\lambda} \right)$$

tényezőjéből adódik. Definiáljuk χ_0 -t a következőképpen

$$\chi(\theta) = \frac{\cosh \theta + \cos \frac{\pi}{2\lambda}}{\cosh \theta - \cos \frac{\pi}{2\lambda}} \chi_0(\theta)$$

ekkor $\chi_0(0)$ a klasszikus határesetben véges

$$\chi_0(0) = \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4\lambda} - \sin \frac{\pi}{4\lambda} \tan \frac{\eta_0}{2\lambda}}{\cos \frac{\pi}{4\lambda} + \sin \frac{\pi}{4\lambda} \tan \frac{\eta_0}{2\lambda}} \right)^2 \sim \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} + O(\beta^2)$$

ezzel szemben a

$$g(\theta) = \frac{\cosh \theta + \cos \frac{\pi}{2\lambda}}{\cosh \theta - \cos \frac{\pi}{2\lambda}}$$

Taylor-együtthatói:

$$\frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} = (-1)^n 4 \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^{2(n+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right)$$

így (8.67) kis β -ra a következő alakot ölti:

$$-\frac{256m}{\sqrt{\pi m L} \beta^4} \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} e^{-2mL} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!! \left(-\frac{128}{mL\beta^4} \right)^n \right)$$

Látható, hogy az egymást követő tagok egyre szingulárisabbak ahogy $\beta \rightarrow 0$ és ráadásul az együtthatók faktoriális növekedést mutatnak.

A feladat tehát

$$-m_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \chi(\theta) e^{-2m_1 L \cosh \theta} \sim -m_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \log \left(1 + \chi(\theta) e^{-2m_1 L \cosh \theta} \right) \quad (8.68)$$

kiszámítása, ahol

$$\chi(\theta) = R_{\left| \right\rangle}^{(1)} \left(i\frac{\pi}{2} - \theta \right)_0 R_{\left| \right\rangle}^{(1)} \left(i\frac{\pi}{2} + \theta \right)_L, \quad \eta_0 = \varphi_0(\lambda + 1), \quad \eta_L = 0, \quad \vartheta_0 = \vartheta_L = \infty$$

$x = \sinh \theta$ helyettesítéssel és nagy L mellett a vezető tagokat megtartva adódik

$$-m_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4\pi} \log \left(1 + \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2\lambda} + x^2/2}{1 - \cos \frac{\pi}{2\lambda} + x^2/2} - 1 \right) \chi_0(0) e^{-2m_1 L} \right)$$

ahol a -1 levonás az integrál konvergenciáját biztosítja (és csak β^0 járulékokat érint). Felhasználva (8.46)-t

$$-m_1 \left[\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{4\lambda} + \cos \frac{\pi}{2\lambda} \chi_0(0) e^{-2m_1 L}} - \sin \frac{\pi}{4\lambda} \right] \sim -\frac{m_1}{2} \chi_0(0) \frac{\cos \frac{\pi}{2\lambda}}{\sin \frac{\pi}{4\lambda}} e^{-2m_1 L}$$

A kis β (nagy λ) határesetben a vezető tagra

$$-\frac{16m}{\beta^2} \tan^2 \frac{\varphi_0}{2} e^{-2mL}$$

adódik, amit (8.66)-hoz hozzáadva, az egyezés a (8.26) alatti E_+ eredménnyel helyreáll. $E^{(DN)}$ -re ugyanez az érvelés működik, míg E_- a (8.65) helyettesítéssel megkapható.

8.5.4. A g - \bar{g} összefüggés igazolása és kiterjesztése tetszőleges dimenziószámra

Látjuk tehát, hogy a (8.40) alatti

$$\tilde{g} = \frac{g}{2}$$

összefüggés integrálható modellekben számos különböző módszerrel ellenőrizhető. Bajnok Zoltánnal és Palla Lászlóval megmutattuk, hogy amennyiben ezt a sejtést nemintegrálható kvantumtérelméletekre is kiterjesztjük, akkor számos szemiklasszikus konzisztencia ellenőrzést kiáll [BPT06a].

Az alábbiakban megmutatom, hogy ez az összefüggés tetszőleges (akár nemintegrálható) $1+1$ dimenziós modellben a peremes kvantumtérelmélet alapvető elveiből levezethető, illetve megadom akármilyen téridő dimenzióban megfogalmazott kvantumtérelméletre való kiterjesztését is. Ehhez a kétpont függvény klaszterezését használom fel.

A peremes kvantumtérelméletekben általánosan megmutatható [BPT06a], hogy az euklidészi kétpont függvény a peremtől távol mindig a következő alakot ölti:

$${}_B \langle 0 | \Phi(x, y, \vec{r}) \Phi(x', y', \vec{r}') | 0 \rangle_B \approx \int \frac{d\rho}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{Z}{\rho^2 + k^2 + \vec{k}^2 + m^2} e^{-i\rho(y-y')} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \left\{ e^{-ik(x-x')} + R(k, \vec{k}) e^{-ik(x+x')} \right\} \quad (8.69)$$

A klaszterezés a következő aszimptotikus viselkedést jelenti:

$${}_B \langle 0 | \Phi(x, y, \vec{r}) \Phi(x', y', \vec{r}') | 0 \rangle_B = {}_B \langle 0 | \Phi(x, y, \vec{r}) | 0 \rangle_B {}_B \langle 0 | \Phi(x', y', \vec{r}') | 0 \rangle_B + O\left(e^{-\mu|y-y'|}\right)$$

amit egy teljes rendszer beszúrásával lehet származtatni, a μ skála a vákuum feletti tömegrésnek felel meg. (8.34) alapján ezt átírhatjuk:

$${}_B \langle 0 | \Phi(x, y, \vec{r}) \Phi(x', y', \vec{r}') | 0 \rangle_B \sim \bar{g}^2 e^{m(x+x')} \quad |y - y'| \rightarrow \infty \quad (8.70)$$

Szabad elméletben $Z = 1$ és $R(k, \vec{k}) = \pm 1$ (Neumann/Dirichlet határfeltételnek megfelelően), így (8.69) kiszámítható

$$\frac{1}{2\pi} (K_0(mr_-) \pm K_0(mr_+)) \ , \quad r_{\pm} = \sqrt{(y - y')^2 + (x \pm x')^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2}$$

ami exponenciálisan csökken, ha $|y - y'| \rightarrow \infty$, azaz nincs vákuumjárulék. Ez utóbbi állítás egyébként mindig igaz, amikor $R(k, \vec{k})$ $k = im$ -ben reguláris. Ezért tegyük fel, hogy a reflexiós faktornak szingularitása van a $k = im$ helyen, ami 1+1 dimenzióban a θ rapiditásban a következő viselkedésnek felel meg:

$$R(\theta) \sim \frac{ig^2/2}{\theta - i\frac{\pi}{2}} \sim -\frac{g^2/2}{\cosh \theta}$$

Ezt átírva a k változóra

$$R(k) \sim -\frac{mg^2/2}{\sqrt{k^2 + m^2}}$$

Látható, hogy a szingularitás nem pólus, hanem annál enyhébb típusú (elágazási pont). Ez a szingularitás zérus energiájú virtuális részecske emissziójaként interpretálható [GZ94], ennek megfelelően magasabb dimenzióban a \vec{k} parallel impulzus komponens megmaradása miatt a következő alakot várjuk :

$$R(k, \vec{k}) \sim -\frac{mg^2/2}{\sqrt{k^2 + \vec{k}^2 + m^2}} (2\pi)^D \delta(\vec{k}) \quad (8.71)$$

A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy $y > y'$: ekkor a ρ integrálás kontúrját az $\Im m \rho < 0$ félsíkban bezárva a szinguláris rész járuléka

$${}_B \langle 0 | \Phi(x, y, \vec{r}) \Phi(x', y', \vec{r}') | 0 \rangle_B \sim - \int \frac{dk}{2\pi} \frac{Z}{2\sqrt{k^2 + m^2}} e^{-\sqrt{k^2 + m^2}(y-y')} \left\{ -\frac{mg^2/2}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{-ik(x+x')} \right\}$$

Mivel $x + x' < 0$, a k kontúr az alsó félsíkban bezárható, ezzel

$${}_B \langle 0 | \Phi(x, y, \vec{r}) \Phi(x', y', \vec{r}') | 0 \rangle_B \sim \frac{g^2}{8} Z e^{m(x+x')} + \dots$$

amiből (8.70) alapján

$$\bar{g} = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{Z}{2}}$$

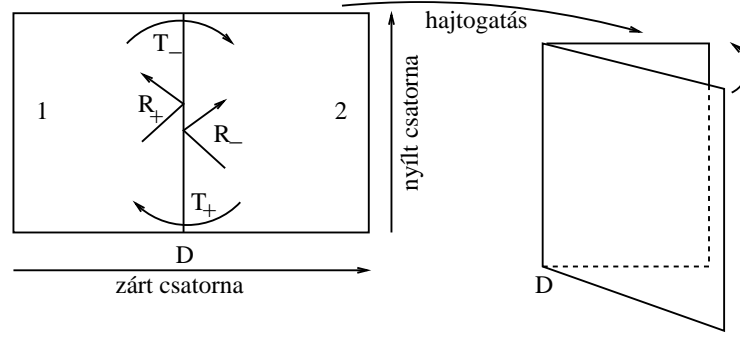
és (8.35)-t felhasználva adódik, hogy

$$\tilde{g} = \frac{g}{2}$$

Fontos megjegyezni, hogy magasabb dimenzióban ez a számolás mindössze a (8.71) feltevés konzisztenciáját mutatja a kétpont függvény klaszterezésével. 1 + 1 dimenzióban azonban, mivel a $\theta = i\frac{\pi}{2}$ szingularitás alakja ismert, a fenti érvelés megadja a (8.40) reláció bizonyítását.

8.6. Alkalmazás a Casimir effektusra

A peremes Lüscher formulák a 8.31 alatt tárgyalt általános téridő dimenzióra érvényes peremállapot formalizmus alapján egyszerűen kiterjeszthetők tetszőleges téridő dimenzióban definiált kvantumtérelméletre. Ennek eredménye pedig nem más, mint a jól ismert Casimir effektus egy újszerű leírása planáris elrendezésben. A Casimir effektus itt nem tárgyalt részleteivel kapcsolatban a [BMM01, Mil04] összefoglaló művekre, illetve Milton [Mil] könyvére utalok.



8.11. ábra. Defekt a kvantumtérelméletben

8.6.1. Defektek a peremállapot formalizmusban

Feltételezve, hogy nincs egyrészecske csatolás, a (8.30) peremállapot (8.36) alapján a következő alakba írható:

$$|B\rangle = \left\{ 1 + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} K_2(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})) A_{in}^\dagger(-\theta, -\vec{k}) A_{in}^\dagger(\theta, \vec{k}) + \dots \right\} |0\rangle \quad (8.72)$$

ahol

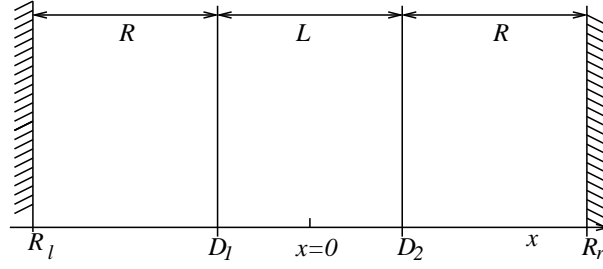
$$K_2(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})) = R\left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})\right)$$

Amennyiben az elmélet S mátrixa triviális és a reflexió teljesen rugalmas, akkor könnyen megmutatható, hogy az integrálható térelméletekre vonatkozó Ghoshal-Zamolodchikov-féle (8.31) kifejezéshez hasonlóan a peremállapot a

$$|B\rangle = \exp\left(\int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} K_2(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})) A_{in}^\dagger(-\theta, -\vec{k}) A_{in}^\dagger(\theta, \vec{k})\right) |0\rangle \quad (8.73)$$

zárt alakba írható.

A Casimir effektus tanulmányozása során azonban olyan határfelületeket is megengedünk, amelyeken a reflexió nem teljes, azaz transzmisszió is megengedett: ezeket *defekt*nek nevezzük. A defekt valójában nem más, mint a két oldalon definiált, akár eltérő kvantumtérelméleti rendszert összekapcsoló határfeltétel. Tegyük fel, hogy $x = x_0$ -nál egy defekt helyezkedik el. A zárt csatornában egy ilyen defekt egy operátornak felel meg, ami az $x < x_0$ rendszer Hilbert-teréből az $x > x_0$ rendszerébe képez. Jelölje az $x < x_0$ tartomány aszimptotikus részecske keltő operátorát (a zárt csatornában) A_1^\dagger , míg az $x > x_0$ tartományét A_2^\dagger . A Bajnok és George által alkalmazott hajtogatási trükkel [BG06] a rendszer egy peremes térelméletbe képezhető, ahol 1 és 2 két részecske fajta indexe lesz, amik csak a peremen hatnak kölcsön egymással. Ekkor négy egyrészecske amplitúdót adhatunk meg: R^\pm megőrzi az 1 illetve 2 tartomány indexet, míg T^\pm 1-et 2-re illetve 2-t 1-re váltja. R^\pm a defekt két oldalán történő reflexióknak, míg T^\pm az egyik oldalról a másikra történő transzmisszióknak felel meg. A fentieket a 8.11 ábrán szemléltetem; ezen



8.12. ábra. A Casimir effektus kiszámításához felvett rendszer

képet és a peremállapot formalizmust felhasználva könnyen belátható, hogy a defekt operátort

$$\begin{aligned}
 D = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} & \left(\right. \\
 R^+ \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) A_1^\dagger(-\theta, -\vec{k}) A_1^\dagger(\theta, \vec{k}) + & \\
 T^+ \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) A_1^\dagger(-\theta, -\vec{k}) A_2(-\theta, -\vec{k}) + & \\
 T^- \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) A_1(\theta, \vec{k}) A_2^\dagger(\theta, \vec{k}) + & \\
 R^- \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) A_2(\theta, \vec{k}) A_2(-\theta, -\vec{k}) & \left. \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{8.74}$$

adja meg. Amennyiben az S mátrix triviális, és a defekten történő szórás teljesen rugalmas¹⁴, akkor D a következő zárt alakba írható:

$$\begin{aligned}
 D = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} \right. & \\
 \left(R^+ \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) A_1^\dagger(-\theta, -\vec{k}) A_1^\dagger(\theta, \vec{k}) + \right. & \\
 T^+ \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) A_1^\dagger(-\theta, -\vec{k}) A_2(-\theta, -\vec{k}) + & \\
 T^- \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) A_1(\theta, \vec{k}) A_2^\dagger(\theta, \vec{k}) & \\
 \left. + R^- \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) A_2(\theta, \vec{k}) A_2(-\theta, -\vec{k}) \right) & \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{8.75}$$

8.6.2. A Casimir effektus származtatása

Tekintsünk egy $\Phi(t, x, \vec{y})$ skalár mezőt $D + 1$ dimenzióban, amit $x = -L/2$ és $x = L/2$ felületeken egy-egy defekt határol le. Mivel megengedjük, hogy a tartomány két falán transzmisszió lépjen fel, érdemes bevezetni két teljesen reflektáló segédhatárfeltételt az $x = \pm(R + L/2)$ felületeken a 8.12 ábra szerint, és később majd elvégezzük az $R \rightarrow \infty$ határátmenetet. Legyen a segédhatárfeltételek reflexiós faktora $R_l(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}))$ és $R_r(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}))$, a két defektet pedig a következő egyrészcseke reflexiós-transzmissziós együtthatókkal jellemezhetjük¹⁵:

$$D_i(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})) = \begin{pmatrix} R_i^+(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})) & T_i^-(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})) \\ T_i^+(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})) & R_i^-(\theta, m_{\text{eff}}(\vec{k})) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

¹⁴ Megjegyzem, hogy $1 + 1$ dimenzióban integrálható defektek csak akkor engedhetnek meg egyszerre nem-triviális transzmissziót és reflexiót, ha az S mátrix triviális [DMS94].

¹⁵ Itt nem szükséges feltételezni, hogy a defekten a szórás elasztikus, és a kvantumtérelmélet maga is teljesen általános (kölsönható) lehet.

ahol $i = 1, 2$. A nyílt csatorna Hamilton operátorát jelölje H_B , a megfelelő Hilbert-teret pedig \mathcal{H}_B . A Casimir effektus H_B alapállapotú energiájának L -függéséből számolható: nevezzük ezt az energiát Casimir energiának. Amennyiben az összes végtelen irányt (t, \vec{y}) T kerületű körökre kompaktifikáljuk, a rendszer partíciós függvényét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} Z_R(L, T) &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} e^{-TH_B} \\ &= \langle B_l | e^{-RH_x^{(1)}} D_1 e^{-LH_x^{(2)}} D_2 e^{-RH_x^{(3)}} | B_r \rangle \end{aligned}$$

ahol $H_x^{(i)}$ a periodikus határfeltételeknek eleget tevő Hamilton operátor az x csatornában a három ($i = 1, 2, 3$) tartományban. Teljes állapotrendszert beszúrva az $R \rightarrow \infty$ határesetben a következő adódik (a periodikus csatorna alapállapotú energiáját $E_0 = 0$ -ra normálva, ami a $T \rightarrow \infty$ határesetben a végtelen rendszer vákuumenergiájának levonását jelenti):

$$\begin{aligned} Z_\infty(L, T) &= \sum_n \langle B_l | 0 \rangle \langle 0 | D_1 | n \rangle \langle n | D_2 | 0 \rangle \langle 0 | B_r \rangle e^{-LE_n} \\ &= \sum_n \langle 0 | D_1 | n \rangle \langle n | D_2 | 0 \rangle e^{-LE_n} \end{aligned}$$

ahol a $B_{l,r}$ segédhatárfeltételektől való függés kiesik, mivel $R \rightarrow \infty$ mellett $|B_{l,r}\rangle$ kifejtéséből csak a vákuum tag ad járulékot. A vezető tagok:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\theta, \vec{k}} \sum_{\theta', \vec{q}} \langle 0 | D_1 | \theta, \vec{k}; \theta', \vec{q} \rangle \langle \theta, \vec{k}; \theta', \vec{q} | D_2 | 0 \rangle e^{-L(m_{\text{eff}}(\vec{k}) \cosh \theta + m_{\text{eff}}(\vec{q}) \cosh \theta')} \\ + O(e^{-3mL}) \end{aligned}$$

A vezető 1 a vákuum ($|n\rangle = |0\rangle$) járuléka, a következő járulékot (8.74) kétrészecske tagjai adják, a magasabb korrekciók a sokrészecske tagokból jönnek. Ez pontosan a (8.37) klaszter kifejtés megfelelője, és teljesen világos, hogy a vezető kétrészecske korrekció csak az R_1^- és R_2^+ reflexiók együttthatóitól függ. A (felületegységre eső) alapállapotú energia az

$$E(L) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{TD} \log Z_\infty(L, T)$$

alakban fejezhető ki, és az eredmény

$$\begin{aligned} E(L) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} \left[m_{\text{eff}}(\vec{k}) R_1^- \left(\frac{i\pi}{2} + \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) R_2^+ \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) \times \right. \\ &\quad \left. e^{-2m_{\text{eff}}(\vec{k}) \cosh \theta L} \right] + O(e^{-3mL}) \end{aligned} \quad (8.76)$$

ahol a véges térfogatban diszkrét impulzus összegeket a szokásos módon a $T \rightarrow \infty$ határesetben integrálással helyettesítettem.

A (8.76) kifejezés megadja a Casimir effektus vezető viselkedését nagy távolságokon, mégpedig teljesen általános módon kölcsönható esetben. Az összes információt az R^\pm reflexiók faktorok hordozzák, amelyek teljes mértékben véges, és a modell hosszútávú (infravörös) viselkedésére jellemző mennyiségek. A szokásos megközelítésben a modell mikroszkopikus (ultraibolya) megfogalmazását veszik alapul, azonban ekkor a felmerülő divergenciák miatt renormálásra van szükség. Az is lehetséges, hogy a modell infravörös viselkedése jelentősen különbözik attól, amit a mikroszkopikus leírás alapján naívan várnánk (közismert példa erre a bezárás az erős kölcsönhatásban). (8.76) ellenben az aszimptotikus részecskeállapotokkal van kifejezve, azaz a nagy távolságokon érvényes szabadsági fokok nyelvén, és a Casimir effektust a (8.39) peremes Lüscher formula magasabb dimenziós kiterjesztéseként fogalmazza. Ezen a nyelven a Casimir effektus nem más, mint peremes végesméret effektus.

További sajátja ennek a kifejezésnek, hogy (implicite ugyan, de) tartalmazza a defektokra lokalizált gerjesztések (ún. felületi plazmonok, amelyek a defekt mátrix imaginárius tengelyre lokalizált pólusaként jelennek meg) járulékát. Ez úgy tehető explicitté, ha a Casimir energiát a szokásos naív nullmódus összegzéssel írjuk fel (ehhez az kell, hogy a szórásmátrix triviális, a defekt mátrix pedig teljesen rugalmas legyen).

Amennyiben a defekt állapot (8.75) alakban exponencializálható, a klaszter sorfejtés felösszegezhető¹⁶ és az eredmény

$$E(L) = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \cosh \theta \int \frac{d^{D-1}\vec{k}}{(2\pi)^{D-1}} m_{\text{eff}}(\vec{k}) \log \left(1 \mp R_1^- \left(\frac{i\pi}{2} + \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) R_2^+ \left(\frac{i\pi}{2} - \theta, m_{\text{eff}}(\vec{k}) \right) e^{-2m_{\text{eff}}(\vec{k}) \cosh \theta L} \right) \quad (8.77)$$

ahol a felső előjel Bose, az alsó előjel pedig Fermi statisztikának felel meg.

A peremállapot megközelítés egy nagy előnye az univerzalitásban rejlik. A [BPT06b] cikkben megmutattuk, hogy a fenti eredmények alapján a planáris elrendezésben ismert legfontosabb eredmények reprodukálhatók. Ilyenek pl. az elektromágneses mező esete dielektrikumok között – az ún. Lifshitz-formula [Lif56, DLP61] –, a szabad bozon lineáris határfeltételekkel [dAC04], vagy szabad fermion ún. zsák határfeltételekkel [Joh75, Mil].

¹⁶ A felösszezés módszerét tekintve ld. LeClair munkatársai [LMSS95] cikkében a termodinamikai Bethe Ansatz származtatását (amit itt triviális S mátrix, és R_1^-/R_2^+ által adott reflexiós faktorok esetére kell alkalmazni). Az általuk elvégzett számoláshoz képest annyi különbség van csupán, hogy a reflexiós faktorok a transzmisszió jelenléte miatt nem tiszta fázisok (ez a levezetésre nincs érdemi hatással), illetve az általuk feltételezett Fermi statisztika helyett mindkét lehetőséggel számolni kell.

9. Összegzés és kitekintés

9.1. Összefoglalás

A dolgozatban megkíséreltem bemutatni, hogy a végesméret effektusok mennyire fontos szerepet töltenek be a kvantumtérelméletben. Láthattuk, hogy segítségükkel számos új ismeretre tehetünk szert a kvantumtérelméletek dinamikájával kapcsolatban. Az alábbiakban röviden összegzem a fontosabb pontokat.

A kvantumtérelméletek alapvető nemperturbatív megközelítése a rácstérelmélet, amelynek során teljesen magától értetődő módon véges térfogatbeli rendszerekkel dolgozunk. Lüscher alapvető műveiben megmutatta, hogy a végesméret effektusok számos fontos információt tartalmaznak a kvantumtérelméletről, még abban az esetben is, ha valójában a végtelen térfogatban jellemző jelenségek iránt érdeklődünk. A végesméret spektrumból kinyerhető az S mátrix, meghatározhatók a spektrum fontos jellemzői, az instabil részecskék (rezonanciák) paraméterei. Ezek között számos olyan mennyiség van, amiről a termodinamikai határesetben nem is kapnánk információt (Maiani-Testa „no-go” tétel), de a végesméret effektusokból kinyerhetők.

$1 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletekben további kérdések vethetők fel. Integrálható kvantumtérelméletek esetén az egzakt S mátrix (peremes esetben az egzakt R mátrix elmélet) és kiterjesztései (pl. a form-faktor bootstrap [Smi92, BPT06c]) segítségével nagyon sok nemperturbatív, mi több, egzakt információt nyerhetünk, ám ezekben a megközelítésekben nem tisztázott a kapcsolat a kvantumtérelmélet dinamikájával. A bootstrap módszerek ugyanis általános elvekből, a magasabb dimenzióban is jól ismert analitikus S mátrix elmélet integrálható modellekre specializált változatából indulnak ki, ahol a szórás faktorizációja elegendő információt biztosít ahhoz, hogy lényegében egyértelműen megadhassuk a szórási amplitúdókat és a lokális operátorok mátrix elemeit. Azonban az egzakt S mátrix amplitúdók egyfelől függhetnek bizonyos szabad paraméterektől, másfelől pedig az egyértelműség csak egy bizonyos minimalitás megkövetelésével adódik (ezt CDD határozatlanságnak nevezzük [CDD56]).

Számos példát mutattam arra, hogy a végesméret effektusok segítségével ezek a kérdések megoldhatók: az S mátrix amplitúdók közvetlenül mérhetők, egzakt relációk adhatók meg a bootstrap paraméterek és a kvantumtérelmélet Lagrange-függvényében szereplő csatolási állandók között (ennek a módszerét ugyan nem részleteztem, de több ilyen eredményt idéztem), a spektrumra vonatkozó jóslatok (pl. peremes kötött állapotok) közvetlenül vizsgálhatók. Nemegyszer ilyen vizsgálatok vezettek később egzakt módon bebizonyított eredményekre, erre volt példa a peremes egyrészecske csatolás és a reflexiók faktor reziduuma közti kapcsolat. A végesméret effektusok segítségével direkt kapcsolatot tudunk teremteni az S mátrix (amely a nagy távolságokon érvényes részecske képen alapszik) és az ultraibolya fixpont közeléből induló nagy energiás leírás között, integrálható térelméletben (mint ezt a Destri-de Vega egyenlet analízise mutatta) ezt a kapcsolatot egzakt módon meg tudjuk határozni, akár az egyes állapotokra kiterjedő részletességgel.

$1 + 1$ dimenzióban igen hatékony eszközök állnak rendelkezésre akkor is, ha a térelmélet nem integrálható (vagy az integrálhatóság nem lényeges szempont). Ilyen módon vizsgálható vákuum-állapotok közti alagutazás jelensége (ϑ -vákuumok, instantonok), vagy a tömegspektrum. Ezzel egy fontos ellenőrzési lehetőséget kapunk olyan módszerek tesztelésére, mint a ritka instanton gáz közelítés vagy a Goldstone-Jackiw-féle form-faktor módszeren alapuló szemiklasszikus megközelítés – éppen az utóbbi esetén láthattuk, mennyire fontos lehet ez, hiszen ezek a módszerek könnyen tévútra is vezethetnek.

Ami talán még fontosabb, egyfajta fejlesztési-kísérleti terepet is nyújtanak ezek a modellek, erre mutattam példát a rezonanciák analízise kapcsán. Hasonló eredményekről számoltam be a kétfrekvenciás sine-Gordon modell fázisdiagramjával kapcsolatban, ahol – túl azon, hogy maga a modell is számos térelméleti/statisztikus fizikai alkalmazás szempontjából érdekes – egy olyan módszert vázoltam, amivel a véges térfogatban érvényes energiaspektrumból eldönthető a fázisátalakulás rendje, és megadható annak típusa (univerzalitási osztálya).

A peremes végesméret effektusok vizsgálata újabb ismereteket nyújt a kvantumtérelméletek nemperturbatív viselkedéséről. Azt is láttuk, hogy az ezzel kapcsolatos eredmények általánosíthatók magasabb dimenziós elméletekre. Ennek kapcsán megmutattam, hogy a Casimir effektus nem más, mint peremes végesméret effektus, valamint hogy az $1 + 1$ dimenzióban kifejlesztett leírás (peremállapot formalizmus) kiterjesztésével megfogalmazható.

Végezetül az $1 + 1$ dimenziós modellek szerepét szeretném kissé jobban tisztázni. Világosan kell látni, hogy jóval többről van szó, mint hogy ezzel egzaktul (integrálható esetben) vagy legalábbis nemperturbatív nagy hatékonysággal és pontossággal (nemintegrálható esetben) tanulmányozható példáit kapjuk a kvantumtérelméleteknek. Egyfelől számos példát lehet hozni arra, amikor ezek a modellek közvetlenül valódi fizikai rendszereket írnak le („kvantum dot”-ok, Kondó effektus, kvantum Hall-effektus, effektív egydimenziós mágneses rendszerek – spin-láncok, spin-létrák –, vagy meglepő módon a réz-benzoát fajhője). Másfelől két esetben is láthattuk (rezonanciák, illetve Casimir effektus), hogy az $1 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletek vizsgálatával magasabb dimenziós rendszerekben is érvényes tanulságokhoz, illetve alkalmazható módszerekhez juthatunk.

9.2. Érdekes kérdések, nyitott irányok

Érdekes nyitott probléma az aszimptotikusan konform térelméletek végesméret effektusainak leírása a nagy energiás (ultraibolya) nézőpontból. Amennyiben ugyanis az alacsony energiás (infravörös) szabadsági fokok felől nézzük, Lüscher formalizmusa, illetve annak kiterjesztései minden további nélkül alkalmazhatók, hiszen ennek egyetlen feltétele a tömegrés léte. A nagy energiás nézőpontból a kérdés korántsem megoldott, hiszen a naív megközelítésben a csatolás a térfogattal nem fut (ellentétben az ultraibolya konform térelméletek esetével, ld. a 4.1 alfejezetben), azonban az ultraibolya divergenciák renormálásának eredményeként logaritmikus futást várunk. Teljesen világos, hogy ehhez renormálási csoport alkalmazása szükséges, és amennyiben nemperturbatív keretben, valamint nemintegrálható elméletekben¹ gondolkodunk, ezt érdemes a csonkolt konform állapottól közelítésben implementálni. Ebben az irányban egy első lépést jelentenek Feverati és munkatársai [FGP⁺06] eredményei. Itt megjegyzem, hogy integrálható σ -modellek esetén Fendley [Fen01], illetve Balog János és Hegedűs Árpád [BH01, BH04a, Heg05, BH05] jelentős eredményeket értek el a termodinamikai Bethe Ansatzon, illetve Destri-de Vega egyenleten alapuló leírás kiterjesztésében, azonban ezek a technikák csak integrálható esetben működnek.

A dolgozat nagy részében a végesméret effektusokat a spektrum szempontjából vizsgáltam, azaz a kvantumtérelmélet energiaszintjeit tanulmányoztam véges térfogatban. Ezt más szempontból úgy is felfoghatjuk, hogy a termodinamikai jellemzők (pl. szabadenergia) által a közép-pontban, hiszen a véges hőmérséklet egyenértékű egy kompakt euklidészi idődimenzióval. Bár így is igen sok érdekes kérdésre kaphatunk választ, érdemes továbblépni és vizsgálatainkat más mennyiségekre is kiterjeszteni.

A kvantumtérelmélet alapvető mennyiségei a lokális operátorok korrelációs függvényei, amelyek ismeretében a teljes elmélet rekonstruálható. Ezek véges térfogatbeli viselkedéséről messze nincsenek olyan kiterjedt ismereteink, mint a spektrumról. Első lépésként tekinthetjük a loká-

¹ Ez már csak azért is fontos, mert integrálható modellek nagyon egyszerű, de fenomenológiai szempontból érdekes kiterjesztései is gyakran elvesztik az integrálhatóságot. Ilyen pl. az $O(3)$ σ -modell a QCD-vel analóg ϑ -taggal.

lis operátorok mátrixelemeit, az ún. form-faktorokat. Ennek vizsgálata éppen most folyik², a numerikus háttérrel a csonkolt konform állapotter módszerével adja, a példaként szolgáló modellek a skálázó Lee-Yang modell és az Ising modell mágneses térben, ahol a végtelen térfogatbeli form-faktorok egzaktul ismertek. Jelenleg már le tudjuk írni olyan form-faktorok végesméret korrekcióit, amelyek a vákuum és egy tetszőleges másik sokrészecske állapot között értelmezettek, mégpedig $1/L$ tetszőleges rendjéig egzaktul (vagyis a térfogattal exponenciálisan csökkenő reziduális végesméret korrekcióit elhanyagolva) és számottevő előrelépés van az általános mátrixelemek terén, ami előreláthatólag hamarosan elvezet egy teljes leíráshoz. E munka eredményeként tisztázni reméljük a véges térfogatbeli form-faktorok keresztezési tulajdonságait, ami nagy előrelépés lenne afelé, hogy integrálható esetre további, lehetőleg egzakt eredményeket kaphassunk, kapcsolódva az irodalomban már megkezdett munkához [Smi98, KS99, Smi, MRS03].

Ennek jelentősége kettős, mivel a véges térfogat egyben véges hőmérsékletként is értelmezhető, vagyis a jelenleg futó kutatásoknak egyszerre két szálába is kapcsolódna, mivel a véges hőmérsékletű várható értékek, form-faktorok és korrelátorok jelenleg szintén élénk érdeklődés tárgyát képezik, számos tisztázatlan kérdéssel [LM99, Sal00, Del01, Mus01, Doy05, AKT06, Doy06].

A lokális operátorok véges térfogatbeli vizsgálatát tervezem kiterjeszteni peremes elméletekre is, így kapcsolódva a Bajnok Zoltánnal és Palla Lászlóval együttműködésben kifejlesztett peremes form-faktor bootstrap-hoz [BPT06c]. Jelenleg még a végtelen térfogatú form-faktorokra az ultraibolya konform térelméleti leírással való összeegyeztetés folyik, ennek eredményei már megvannak, hamarosan tervezzük a publikálásukat³.

A fenti irányokhoz részben kapcsolódva, egy másik nagyobb ívű terv a form-faktorok alkalmazása peremes renormálási csoport folyamatok leírására, ami Kormos Márton [Kor06, Kor07] (volt doktoranduszom) témájának szerves továbbvitelét jelentené. Ebben a munkában a renormálási csoportfolyamatok vizsgálatának alapvető eszköze a csonkolt konform állapotter módszere volt. Elképzelhető egy másik, ettől független megközelítés, ami a perem nélküli renormálási csoportfolyamatokra Zamolodchikov [Zam86] által megkonstruált c -tétel analógján, az ún. g -tételen [FK04] alapul, ahol g az Affleck és Ludwig [AL91] által bevezetett peremes entrópia (nem össze tévesztendő a peremes egyrészecske csatolással). Ezt szeretném a peremes form-faktorok segítségével összesszabályként megfogalmazni (Cardy [Car88] c -tételre vonatkozó munkáját, valamint [CFL91, FLV91] ugyancsak a c -tételre vonatkozó eredményeit általánosítva). Ehhez többek között a peremes form-faktor programot is általánosítani kell tömegrés nélküli elméletekre, mivel a peremes renormálási csoport folyamatok esetén elsősorban az az eset igazán érdekes, amikor a peremtől távol az elmélet kritikus marad (a lehetséges hűrelméleti, valamint a szilárdtestek szennyezőivel kapcsolatos alkalmazások is ilyen modellekre vezetnek).

Egy másik érdekes kutatási irány ugyancsak a peremes form-faktor programhoz kapcsolódva, a form-faktor perturbációszámítás általánosításával szennyezők realisztikusabb modellezését tenné lehetővé. Ez jelenleg még csak a tervek szintjén létezik.

A két utóbbi problémakörben, bár magában a megfogalmazásban nem, de a vizsgálatok során a végesméret effektusok segítségével kinyerhető információk várhatóan alapvető szerepet játszanak majd.

A Casimir effektussal kapcsolatos vizsgálatok továbbvitele is érdekes iránynak ígérkezik. Az általam bemutatott eredmények planáris elrendezésre vonatkoztak. Azonban semmilyen elvi akadálya nincs annak, hogy a peremállapot formalizmust más elrendezésre általánosítsuk; persze megfelelő módszert kell találni a peremállapot meghatározására. Ebben az esetben a módszer előnye az infravörös irányból történő, a regularizáció és a renormálás problematikájától mentes volta lehetne, ami igen érdekes annak fényében, hogy a divergenciák kezelését tekintve még számos tisztázatlan kérdés van a szakirodalomban (ld. pl. [MCPW06]). A peremállapot formalizmus ilyen kiterjesztése azonban ma még teljesen felderítetlen probléma (bár lehetségesnek látszik), így egyelőre nem dönthető el az sem, mekkora előrehaladás lehetséges ebben a kérdésben.

² Ezt a kutatási irányt Pozsgay Balázs, vezetésem alatt dolgozó doktorandusszal közösen vesszük.

³ Ezt a munkát Szócs Miklós végzi a vezetésem alatt, diplomamunkásként.

A. Jelölések és konvenciók

A.1. Kvantumtérelméleti konvenciók

Tekintsük egy $D = d + 1$ dimenziós Minkowski térben definiált Φ skalármező kvantumtérelméletét. A korrelációs (Wightman) függvényeket a

$$\langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1) \dots \Phi(x_N) e^{-S[\Phi]}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]}} \quad (\text{A.1})$$

funkcionálintegrál definiálja, és ezekkel az elmélet összes fizikai mennyisége kifejezhető. A funkcionálintegrál mértékét a

$$S[\Phi] = \int d^D x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U(\Phi) \right)$$

klasszikus hatás határozza meg. A Φ mező egy operátor értékű disztribúció, amely kielégíti az egyidejű kanonikus csererelációkat

$$[\Phi(t, \vec{r}), \partial_t \Phi(t, \vec{r}')] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Az aszimptotikus bejövő (*in*) illetve kimenő (*out*) multirészecske állapotok kifeszítik a teljes Hilbert teret (aszimptotikus teljesség), amelynek (két) bázisa így felépíthető az aszimptotikus részecskék keltő operátorai segítségével:

$$\mathcal{H} = \text{span} \{ a_{in}^+(\vec{p}_1) \dots a_{in}^+(\vec{p}_N) | 0 \rangle \} = \text{span} \{ a_{out}^+(\vec{p}_1) \dots a_{out}^+(\vec{p}_N) | 0 \rangle \}$$

ahol az $a_{in/out}^+(\vec{p})$ operátorokat a következőképpen normáljuk:

$$[a_{in/out}(\vec{p}), a_{in/out}^+(\vec{p}')] = (2\pi)^d \omega(\vec{p}) \delta^{(d)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

ahol $\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, m a részecskék fizikai tömege.¹ A továbbiakban a $p = (\omega(\vec{p}), \vec{p})$ jelölést fogom használni a kovariáns energia-impulzus vektorra.

A fentieknek megfelelően a sokrészecske állapotok skalárszorzatai a következő alakot öltik

$${}_{in/out} \langle A(\vec{q}_1) \dots A(\vec{q}_M) | A(\vec{p}_1) \dots A(\vec{p}_N) \rangle_{in/out} = \delta_{MN} \sum_{\pi \in S_N} \prod_{i=1}^N (2\pi)^d \omega(\vec{p}_i) \delta^{(d)}(\vec{p}_i - \vec{q}_{\pi(i)}) \quad (\text{A.2})$$

ahol S_N az $\{1, \dots, N\}$ számok permutációinak csoportja (a permutációkra vett összegzés a részecskék Bose statisztika szerinti megkülönböztetetlenségét veszi figyelembe).

Heisenberg képben az időfejlődést

$$\Phi(x, t, \vec{r}) = e^{iHt} \Phi(x, 0, \vec{r}) e^{-iHt}$$

a következő Hamilton operátor adja meg:

$$H = \int d^d \vec{r} \left(\frac{1}{2} (\partial_t \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\partial}_r \Phi)^2 + U(\Phi) \right)$$

¹ Ez egy kettes faktorról eltér a szokásos konvenciótól, amelyben $[a_{in/out}(\vec{p}), a_{in/out}^+(\vec{p}')] = (2\pi)^d 2\omega(\vec{p}) \delta^{(d)}(\vec{p} - \vec{p}')$, amit a későbbiek során figyelembe is kell venni, pl. a rugalmas kétrészecske szórási amplitúdóra vonatkozó (A.3) összefüggésnél.

Az (A.1) alatti korrelátor ebben a Hamiltoni képből az időrendezett vákuum várható értékkel azonosítható

$$\langle \Phi(t_1, \vec{r}_1) \dots \Phi(t_N, \vec{r}_N) \rangle = \langle 0 | T_t (\Phi(t_1, \vec{r}_1) \dots \Phi(t_N, \vec{r}_N)) | 0 \rangle$$

A szórás operátora (S) az az unitér transzformáció, amely az *out* állapotok bázisát az *in* bázisra képezi. Ennek az operátornak a mátrixelemei adják meg a különböző szórásfolyamatok kvantumelméleti valószínűségi amplitúdóit, és ezeket összefoglaló néven S mátrixnak nevezzük.

A fenti konvenciók értelemszerűen kiterjeszthetők több mező esetére, illetve amikor az aszimptotikus részecskék belső kvantumszámokkal is rendelkeznek (multiplett szerkezet), valamint több különböző nyugalmi tömeggel jellemezhetők, de egyszerűség kedvéért ezek részletes felírásától most eltekintünk. Fermionok esetén értelemszerűen a megfelelő kommutátorokat antikommutátorra kell kicserélni, és a skalárszorzatban a permutáció megfelelő előjelét figyelembe kell venni.

Egy fontos mennyiség az

$$A_a(\vec{p}) + A_b(\vec{q}) \rightarrow A_a(\vec{p}') + A_b(\vec{q}')$$

rugalmas kétrészecske szórás folyamat amplitúdója, amit a következő összefüggés ad meg:

$$\begin{aligned} {}_{out} \langle A_a(\vec{p}') A_b(\vec{q}') | A_a(\vec{p}) A_b(\vec{q}) \rangle_{in} &= (2\pi)^{2d} \omega_a(\vec{p}) \omega_b(\vec{q}) \delta^{(d)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{(d)}(\vec{q} - \vec{q}') \\ &+ \frac{i}{4} (2\pi)^{d+1} \delta^{(d+1)}(p' + q' - p - q) T_{ab}(\vec{p}', \vec{q}' | \vec{p}, \vec{q}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ahol T_{ab} az ún. átmeneti amplitúdó (ha $a = b$, akkor az első tagot (A.2)-nak megfelelően szimmetrizálni kell). Ennek azt a speciális esetét, amikor a kimenő részecskék impulzusai megegyeznek a bejövőkével

$$F_{ab}(\vec{p}, \vec{q}) = T_{ab}(\vec{p}, \vec{q} | \vec{p}, \vec{q}) \quad (\text{A.4})$$

előreszórás amplitúdónak nevezzük.

A.2. Konvenciók $D = 2$ esetén

Kétdimenziós kvantumtérelméletek esetén számos egyszerűsítésre nyílik lehetőség. A részecskék energiája és impulzusa az ún. rapiditás változóval paraméterezhető:

$$p_1 = m_a \sinh \theta, \quad p_0 = \omega = \sqrt{p^2 + m_a^2} = m_a \cosh \theta \quad (\text{A.5})$$

A θ rapiditású részecske sebességét $c = 1$ egységrendszerben $\tanh \theta$ adja meg. Egy szórásfolyamat bemeneti állapotában a leggyorsabb részecske balra van a többiektől, amelyek a sebesség szerint csökkenő sorrendbe rendeződnek. Ezért bevezethetjük a következő jelölést:

$$|A_{a_1}(p_1) \dots A_{a_n}(p_n)\rangle_{in} = |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{a_1 \dots a_n}, \quad \theta_1 > \dots > \theta_n$$

Hasonlóan, a kimeneti állapotban a sorrend pont fordított, ezért jelölhetjük a kimeneti állapotot a következőképpen:

$$|A_{a'_1}(p'_1) \dots A_{a'_m}(p'_m)\rangle_{out} = |\theta'_1, \dots, \theta'_m\rangle_{a'_1 \dots a'_m}, \quad \theta'_1 < \dots < \theta'_m$$

Ebben a jelölésben az egyrészecske állapotok normálása

$${}_{a'} \langle \theta' | \theta \rangle_a = 2\pi \delta_{aa'} \delta(\theta - \theta')$$

[KM91] nyomán² tekintsük most a

$$A_a(\vec{p}) + A_b(\vec{q}) \rightarrow A_{a'}(\vec{p}') + A_{b'}(\vec{q}')$$

kétrészecske folyamatot, ahol vagy $m_a = m_{a'}$ és $m_b = m_{b'}$, vagy pedig $m_a = m_{b'}$ és $m_b = m_{a'}$ (vagyis ugyanaz a két részecske van a kezdő és a végállapotban). Az energia és impulzus megmaradási egyenletének ekkor összesen két lehetséges megoldása van:

² Akárcsak az előbbieken, itt is tekintettel kell lenni arra, hogy az itt használt normálás az egyrészecske állapotokra egy kettes faktorialal különbözik attól, amit [KM91] használ.

1. $\theta_{a'} = \theta_a, \theta_{b'} = \theta_b$
2. $\theta_{a'} = \theta_a^R, \theta_{b'} = \theta_b^R$ (visszalökődési – „recoil” – megoldás), ahol

$$\theta_a^R = \theta_b + \log \frac{m_a e^{\theta_a} + m_b e^{\theta_b}}{m_a e^{\theta_b} + m_b e^{\theta_a}} \quad , \quad \theta_b^R = \theta_a + \log \frac{m_a e^{\theta_a} + m_b e^{\theta_b}}{m_a e^{\theta_b} + m_b e^{\theta_a}}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\theta_a > \theta_b$ és $\theta_{a'} > \theta_{b'}$ (ekkor automatikusan $\theta_a^R < \theta_b^R$). A szórásamplitúdót ezekkel a jelölésekkel a következő mátrixelem adja

$${}_{b'a'} \langle \theta_{b'} \theta_{a'} | \theta_a \theta_b \rangle_{ab} = \begin{cases} (2\pi)^2 \delta(\theta_{a'} - \theta_a) \delta(\theta_{b'} - \theta_b) \mathcal{S}_{ab}^{a'b'}(\theta_1 - \theta_2) & , \quad m_a = m_{a'}, m_b = m_{b'} \\ (2\pi)^2 \delta(\theta_{a'} - \theta_b^R) \delta(\theta_{b'} - \theta_a^R) \mathcal{R}_{ab}^{a'b'}(\theta_1 - \theta_2) & , \quad m_a = m_{b'} \neq m_b = m_{a'} \end{cases}$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ab}^{a'b'}(\theta_a - \theta_b) &= \delta_{a'a} \delta_{b'b} + \frac{i T_{a'b',ab}(\theta_a, \theta_b | \theta_a, \theta_b)}{4 m_a m_b \sinh(\theta_1 - \theta_2)} \\ \mathcal{R}_{ab}^{a'b'}(\theta_a - \theta_b) &= \frac{i T_{a'b',ab}(\theta_b^R, \theta_a^R | \theta_a, \theta_b)}{4 m_a m_b \sinh(\theta_a - \theta_b)} \end{aligned}$$

(az, hogy ezek az amplitúdók csak a $\theta_a - \theta_b$ relatív rapiditástól függnének, a Lorentz-invarianciából következik). Amennyiben léteznek olyan lokális tenzoriális megmaradó áramok, amelyek Lorentz spinje nagyobb mint 2 (azaz a kvantumtérelmélet integrálható), a második amplitúdó (\mathcal{R}) azonosan eltűnik.

B. Konform térelméleti módszerek

B.1. Konform térelmélet a komplex síkon

Minden relativisztikus skálainvariáns elmélet egyben invariáns a konform (szögtartó) transzformációk csoportja alatt, ami $1 + 1$ téridő dimenzióban végtelen dimenziós. Belavin, Polyakov és A. B. Zamolodchikov [BPZ84] megadták az ilyen elméletek általános felépítését, és cikkük nyomán a konform térelmélet önálló diszciplínává lépett elő, amelynek az elméleti fizika rengeteg ágában van jelentős alkalmazása, a kondenzált anyagok elméletétől a húrelméletig. Itt csak egy nagyon rövid összefoglalót adok azokról az alapvető fogalmakról, amelyek a dolgozatban szerepet játszanak.

Az euklidészi téridőt a komplex síkkal azonosítva, koordinátaként a holomorf/antiholomorf koordinátákat használhatjuk:

$$z = \tau + ix \quad , \quad \bar{z} = \tau - ix$$

A konform szimmetria következtében az energia-impulzus tenzor nyoma eltűnik

$$T_{z\bar{z}} = 0$$

és a megmaradási tételek következtében a másik két komponense tisztán holomorf/antiholomorf (balra/jobbra mozgó):

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0 = \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}}$$

A konform transzformációkat $T(z) = T_{zz}$ és $\bar{T}(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}$ generálják, és a szimmetria szempontjából a z és \bar{z} koordináta külön kezelhető: az egyiket a holomorf, a másikat az antiholomorf transzformációk hatnak.

Egy Φ mező Δ , $\bar{\Delta}$ súlyú primér tér, ha a komplex sík egy $w = f(z)$, $\bar{w} = \bar{f}(\bar{z})$ konform transzformációja alatt (ahol f és \bar{f} két tetszőleges független komplex analitikus leképezés) a következő módon transzformálódik:

$$\Phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^\Delta \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{\Delta}} \Phi(w, \bar{w}) \quad (\text{B.1})$$

Az energia-impulzus tenzor transzformációja ettől eltér, mivel nem primér térről van szó:

$$\begin{aligned} T(z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 T(w) + \frac{c}{12} \{f; z\} \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \bar{T}(\bar{w}) + \frac{c}{12} \{\bar{f}; \bar{z}\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ahol

$$\{f; z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

az ún. Schwarz-derivált, c pedig az elmélet ún. centrális töltése. Fizikai korrelátorban $\bar{z} = z^*$ -t kell helyettesíteni a következőképpen:

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1, z_1^*) \dots \mathcal{O}_n(z_n, z_n^*) \rangle$$

A kanonikus hamiltoni kép a síkon az ún. radiális kvantálással adható meg, amiben az időfejlődés sugárirányú, ennek megfelelően a korrelátorban a terek időrendezett szorzatának a radiális rendezés felel meg (ez a 2.2 ábrán látható exponenciális leképezéssel van összhangban). A továbbiakban minden operátorszorzatot radiálisan rendezettnek tételezünk fel:

$$\mathcal{O}_1(z, \bar{z})\mathcal{O}_2(w, \bar{w}) = \begin{cases} \mathcal{O}_1(z, \bar{z})\mathcal{O}_2(w, \bar{w}) & , |z| = |\bar{z}| > |w| = |\bar{w}| \\ \mathcal{O}_2(w, \bar{w})\mathcal{O}_1(z, \bar{z}) & , |z| = |\bar{z}| < |w| = |\bar{w}| \end{cases}$$

A primér terek jellemezhetők az energia-impulzus tenzorral vett operátorszorzat kifejtésükkel is

$$\begin{aligned} T(z)\Phi_i(w, \bar{w}) &= \frac{\Delta_i\Phi_i(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w\Phi_i(w, \bar{w})}{(z-w)} + O(1) \\ \bar{T}(\bar{z})\Phi_i(w, \bar{w}) &= \frac{\bar{\Delta}_i\Phi_i(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial_{\bar{w}}\Phi_i(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})} + O(1) \end{aligned}$$

Az energia-impulzus tenzor önmagával vett operátorszorzatának kifejtése ezzel szemben a következő alakú:

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + O(1) \\ \bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w}) &= \frac{c/2}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2\bar{T}(\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial_{\bar{w}} \bar{T}(\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})} + O(1) \end{aligned}$$

ami ismét azt mutatja, hogy az energia-impulzus tenzor nem primér tér.

Az energia-impulzus tenzor módus kifejtése a következő alakú

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad , \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_n}{\bar{z}^{n+2}} \quad (\text{B.3})$$

Az L_n, \bar{L}_n módusok generálják a kétdimenziós konform szimmetria algebrát, ami nem más, mint két (bal, illetve jobb) Virasoro algebra

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m} \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Abból, hogy T és \bar{T} a Minkowski formalizmusban hermitikus, következik, hogy a hermitikus konjugálás a következőképpen hat a Virasoro generátorokon:

$$\begin{aligned} L_n^\dagger &= L_{-n} \\ \bar{L}_n^\dagger &= \bar{L}_{-n} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ezen generátorok közül $L_0 + \bar{L}_0$ a dilatációkat, $L_0 - \bar{L}_0$ a Lorentz boostokat, míg L_{-1} és \bar{L}_{-1} a z , illetve a \bar{z} szerinti eltolásokat generálja. A Virasoro generátorok hatása az operátorokon kontúrintegrálokkal reprezentálható:

$$\begin{aligned} (L_m\mathcal{O})(z, \bar{z}) &= \oint_z \frac{d\zeta}{2\pi i} (\zeta - z)^{m+1} T(\zeta)\mathcal{O}(z, \bar{z}) \\ (\bar{L}_m\mathcal{O})(z, \bar{z}) &= \oint_{\bar{z}} \frac{d\bar{\zeta}}{2\pi i} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{m+1} \bar{T}(\bar{\zeta})\mathcal{O}(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ahol a $\zeta(\bar{\zeta})$ kontúrok a $z(\bar{z})$ pontot fogják körül. A mezők adjungáltját a következő (természetes) módon definiáljuk:

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1, z_1^*) \dots \mathcal{O}_n(z_n, z_n^*) \rangle^* = \langle \mathcal{O}_1^+(z_1^*, z_1) \dots \mathcal{O}_n^+(z_n^*, z_n) \rangle \quad (\text{B.7})$$

Az operátorok teljes rendszert alkotnak, vagyis bármely kettő szorzata kifejthető a Wilson-féle operátorszorzat kifejtés alapján

$$\mathcal{O}_a(z)\mathcal{O}_b(w) = \sum_k \frac{\mathcal{C}_{ab}^c \mathcal{O}_c(w, \bar{w})}{(z-w)^{\Delta_a+\Delta_b-\Delta_c}(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{\Delta}_a+\bar{\Delta}_b-\bar{\Delta}_c}} \quad (\text{B.8})$$

ahol az egyenlőséget egy korrelációs függvénybe beszúrva kell érteni (vagyis a gyenge operátortopológiában). A \mathcal{C}_{ab}^c hárompont csatolások a primér terek közti C_{ij}^k hárompont csatolások ismeretében mind meghatározhatók, ennek módszerét a B.4 függelékben tárgyalom. A primér tereket egypont és kétpont függvényére a konform szimmetria segítségével a következő adódik

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i(z, \bar{z}) \rangle &= \delta_{\Delta_i, 0} A \\ \langle \Phi_i(z, \bar{z}) \Phi_j(w, \bar{w}) \rangle &= \frac{\delta_{\Delta_i, \Delta_j} \delta_{\bar{\Delta}_i, \bar{\Delta}_j} B_{ij}}{(z-w)^{2\Delta_i} (\bar{z}-\bar{w})^{2\bar{\Delta}_i}} \end{aligned}$$

hárompont függvényeik alakja pedig

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i(z_1, \bar{z}_1) \Phi_j(z_2, \bar{z}_2) \Phi_k(z_3, \bar{z}_3) \rangle &= C_{ijk} \cdot (z_1 - z_2)^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\bar{\Delta}_k - \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j} \\ &\cdot (z_1 - z_3)^{\Delta_j - \Delta_i - \Delta_k} (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)^{\bar{\Delta}_j - \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_k} \\ &\cdot (z_2 - z_3)^{\Delta_i - \Delta_j - \Delta_k} (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)^{\bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j - \bar{\Delta}_k} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ahol

$$A = \langle 1 \rangle = \langle 0|0 \rangle, \quad B_{ij} = \delta_{ij} C_{ii}^1 \langle 1 \rangle, \quad C_{ijk} = C_{jk}^i C_{ii}^1 \langle 1 \rangle$$

A \mathcal{C}_{ab}^c hárompont csatolások ismeretében elvileg az összes korrelátor meghatározható, vagyis kvantumtérelméleti szempontból a csatolások ismeretében az elmélet megoldottnak tekinthető.

A Virasoro algebra ábrázolásai egy valós számmal jellemezhetők, ami L_0 sajátértéke az ún. legmagasabb súlyú vektoron

$$\begin{aligned} L_0 |\Delta\rangle &= \Delta |\Delta\rangle \\ L_n |\Delta\rangle &= 0, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

a teljes ábrázolás pedig az ún. Verma modul segítségével adható meg, amit a

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |\Delta\rangle, \quad 0 < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$$

ún. leszármaztatott vektorok feszítenek ki. Egy ilyen vektoron L_0 sajátértéke $\Delta + n_1 + \dots + n_k$; az $N = n_1 + \dots + n_k$ egész számot a vektor (leszármaztatási) szintjének nevezzük. A Verma modul nem mindig alkot irreducibilis ábrázolást: Δ speciális értékeinél ún. null-vektorok lehetnek benne, amelyek maguk is eleget tesznek a legmagasabb súlyú vektor feltételeinek. Ilyenkor ezen vektorok kifaktorizálásával kaphatunk irreducibilis ábrázolást, erre a B.2 függelékben leírok egy algoritmust. A Δ legmagasabb súlyhoz tartozó irreducibilis ábrázolást \mathcal{V}_Δ -val fogom jelölni.

A teljes elmélet Hilbert tere a kettős (bal/jobbs) Virasoro algebra irreducibilis ábrázolásainak direkt összegeként áll elő:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{V}_{\Delta_i} \otimes \mathcal{V}_{\bar{\Delta}_i}$$

ahol egy adott $\mathcal{V}_\Delta \otimes \mathcal{V}_{\bar{\Delta}}$ ábrázolás többször is előfordulhat. A $\mathcal{V}_\Delta \otimes \mathcal{V}_{\bar{\Delta}}$ modul legmagasabb súlyú állapotát $|\Delta, \bar{\Delta}\rangle$ -vel jelöljük. A legmagasabb súlyú állapotok skalárszorzatát a következőképpen rögzíthetjük:

$$\langle \Delta_i, \bar{\Delta}_i | \Delta_j, \bar{\Delta}_j \rangle = a_i \delta_{ij} \quad (\text{B.11})$$

ahol a_i megválasztása konvenció kérdése (ld. (B.15)-ban a_i kifejezését az operátorszorzat algebra hárompont csatolásainak normálásával). A leszármaztatott állapotok skalárszorzata ezek után (B.4,B.5) alkalmazásával egyértelműen kiszámítható.

A konform térelméletben az állapotok és operátorok között egy-egy értelmű megfeleltetés áll fenn. Minden $|\Psi\rangle$ állapothoz egyértelműen rendelhető egy $\mathcal{O}_\Psi(z, \bar{z})$ mező, ami a vákuumból az adott állapotot kelti:

$$|\Psi\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \mathcal{O}_\Psi(z, \bar{z})|0\rangle$$

ahol a vákuumállapot egy olyan legmagasabb súlyú vektor, amely egyben eltolásinvariáns is, azaz $L_{-1}|0\rangle = \bar{L}_{-1}|0\rangle = 0$. A konform vákuumhoz rendelt \mathcal{O} operátor az \mathbb{I} egységoperátor, amelynek súlyai $\Delta = \bar{\Delta} = 0$.

A Hilbert tér minden $\mathcal{V}_{\Delta_i} \otimes \mathcal{V}_{\bar{\Delta}_i}$ moduljának legmagasabb súlyú vektorához egy $\Delta_i, \bar{\Delta}_i$ súlyú Φ_i primér tér tartozik

$$|\Delta_i, \bar{\Delta}_i\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \Phi_i(z, \bar{z})|0\rangle \quad (\text{B.12})$$

A leszármaztatott állapotokat a megfelelő leszármaztatott terek keltik, a lokális operátorok tehát az állapotokkal azonos módon a Virasoro algebra ábrázolásaiba szervezhetőek. A leszármaztatott állapotok (B.6) alkalmazásával kontúrintegrálokkal reprezentálhatók.

A legmagasabb súlyú állapotok hermitikus konjugáltja a következő módon állítható elő:

$$\langle \Delta_i, \bar{\Delta}_i | = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} (-1)^{\Delta_i - \bar{\Delta}_i} \langle 0 | \bar{z}^{-2\Delta_i} z^{-2\bar{\Delta}_i} \Phi_i^+(\bar{z}, z) \quad (\text{B.13})$$

ahol a $+$ a (B.7) szerinti adjungálást jelenti. A konjugált állapot a radiális rendezésnek megfelelően a $z = \bar{z} = \infty$ pontban lokalizálható, a fenti kifejezést a $z \rightarrow 1/z$, $\bar{z} \rightarrow 1/\bar{z}$ transzformáció alkalmazásával kaphatjuk meg, megfelelő fáziskonvenció választása után. A végtelen távoli pontot hozzávéve a síkhoz, az elmélet így valójában a komplex számgömbön definiált. A konjugált állapotok leszármaztatottjait a következő kontúrintegrálokkal állíthatjuk elő:

$$\begin{aligned} (L_m \mathcal{O})(\infty) &= - \oint_{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{-m+1} \mathcal{O}(\infty) T(\zeta) \\ (\bar{L}_m \mathcal{O})(\infty) &= - \oint_{\infty} \frac{d\bar{\zeta}}{2\pi i} \bar{\zeta}^{-m+1} \mathcal{O}(\infty) \bar{T}(\bar{\zeta}) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

amit megkaphatunk, ha (B.6)-ra a $z \rightarrow 1/z$, $\bar{z} \rightarrow 1/\bar{z}$ transzformációt alkalmazzuk.

Mivel primér tér adjungáltja is primér, ezért létezik egy olyan \mathcal{K}_{ij} mátrix, hogy

$$\Phi_i^+(\bar{z}, z) = \sum_j \mathcal{K}_{ij} \Phi_j(\bar{z}, z)$$

Ennek segítségével a legmagasabb súlyú állapotok (B.11)-beli normálása a következőképpen fejezhető ki a primér terek hárompont csatolásaival:

$$a_i = \sum_j (-1)^{\Delta_i - \bar{\Delta}_i} \mathcal{K}_{ij} C_{ij}^1 \langle 0|0\rangle \quad (\text{B.15})$$

B.2. Virasoro ábrázolás bázisának előállítása

A következőkben egy rekurzív módszert ismertetek egy Virasoro ábrázolás bázisának meghatározására előre adott maximális szintig bezárólag. Tegyük fel, hogy adott az ábrázolás Δ legmagasabb súlya és a Virasoro algebra c centrális töltése.

A $|\Delta\rangle$ primér állapot mindig lineárisan független, és a nulladik szint bázisát alkotja. Ezzel adott a rekurzió kezdő lépése. Tegyük fel, hogy az $N - 1$ szintig ismerjük az egyes szintek egy független vektorokból álló bázisát, amiket jelöljünk a következőképpen:

$$\text{Bas}_l = \{|\Psi_{lm}\rangle : m = 1, \dots, d_l\} \quad , l = 0, \dots, N - 1$$

ahol l az adott szintet jelöli, d_l az adott szinten létező lineárisan független vektorok (a bázis elemeinek) száma. Az előbbi megjegyzés miatt $\text{Bas}_0 = \{|\Delta\rangle\}$. Ezek a vektorok mind a következő alakba írhatók:

$$|\Psi_{lm}\rangle = L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |\Delta\rangle, \quad 0 < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k, \quad \sum_k n_k = l$$

(azt, hogy csak az elemi L -monomok fordulnak elő, lineáris kombinációik nem, az ismertetendő algoritmus garantálja). Készítsük el az N -edik szint vektorainak egy listáját úgy, hogy L_{-N} -nel hatunk Bas_0 elemeire, L_{-N+1} -gyel Bas_1 elemeire és így tovább:

$$\widetilde{\text{Bas}}_N = L_{-N}\text{Bas}_0 \bigcup L_{-N+1}\text{Bas}_1 \bigcup \dots \bigcup L_{-1}\text{Bas}_{N-1} \quad (\text{B.16})$$

(ahol ~arra utal, hogy ez még nem feltétlenül bázis, hiszen bár az előző szinteken már kifaktorizáltuk a nem független vektorokat, ezen a szinten még nem tettük meg ezt a lépést). Célszerű ezt a halmazt rendezett listaként elképzelni, vagyis a műveletek során az elemek felsorolási sorrendjét mindig megtartjuk.

Ezután a Bas_N a következőképpen áll elő. Vesszük $\widetilde{\text{Bas}}_N$ első vektorát, és elkészítjük a vektorok Virasoro belső szorzataiból alkotott mátrixot (ennek kiszámítására az eljárást ld. B.3 alatt). Ebben a lépésben ez egy 1×1 -es mátrix. Amennyiben ennek a determinánsa (azaz egyetlen eleme) nem zérus, akkor a vektort hozzáírjuk a bázishoz, ha nem, továbblépünk addig, amíg egy nemzérus hosszúságú vektort találunk. Az első ilyet beleírjuk a Bas_N bázisba. Ezután a következő vektorral megkíséreljük a bázist bővíteni. A bővítést akkor fogadjuk el, ha a bővített bázis belső szorzataiból alkotott 2×2 -es mátrix determinánsa nem 0, ha ez nem teljesül, akkor tovább ugrunk a következőre. Ha megtaláltuk a második elemet a bázishoz, akkor a listában következő vektort próbáljuk meg hozzáadni a bázishoz az immár 3×3 -as belső szorzat mátrix vizsgálatával. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg $\widetilde{\text{Bas}}_N$ összes vektora sorra nem kerül.

A fenti eljárás eredménye az, hogy Bas_N a $\widetilde{\text{Bas}}_N$ egy olyan maximális részhalmaza lesz, amin a Virasoro belső szorzat nem fajul el. A Virasoro algebra ábrázoláselméletének segítségével belátható, hogy ezzel a kérdéses modul N -edik szintjének egy bázisát kapjuk.

Ez az eljárás megfelelő szimbolikus szoftver (**Mathematica**, **Maple**) segítségével automatizálható, és eredményeként előáll a \mathcal{V}_Δ modul egy bázisa az N -edik szintig bezárólag, ráadásul azonnal a szint szerint gradált alakban. Az eredményt a bemeneti paraméterek (Δ, c) feltüntetésével

$$\bigcup_{k=0}^N \text{Bas}_k(\Delta, c) \quad (\text{B.17})$$

alakba írhatjuk, ahol k a leszármaztatási szint által adott gradálást jelenti. Ez az eredmény képezi az alapját a csonkolt konform állapottér bázisa 4.2.1 alatti előállításának.

B.3. Belső szorzatok számítása Virasoro ábrázolásokban

Legyen most adott a konform Hilbert-tér két vektora:

$$\begin{aligned} \Psi &= \bar{L}_{-m_1} \dots \bar{L}_{-m_l} L_{-n_1} \dots L_{-n_k} |i\rangle, & m_1 \geq \dots \geq m_l > 0, n_1 \geq \dots \geq n_k > 0 \\ \Psi' &= \bar{L}_{-m'_1} \dots \bar{L}_{-m'_{l'}} L_{-n'_1} \dots L_{-n'_{k'}} |i'\rangle, & m'_1 \geq \dots \geq m'_{l'} > 0, n'_1 \geq \dots \geq n'_{k'} > 0 \end{aligned}$$

ahol $|i\rangle$ és $|i'\rangle$ legmagasabb súlyú állapotok és a leszármaztató operátorokat a feltüntetett konvenció alapján sorbarendezettnek tételezzük fel (a B.2 alatt ismertetett eljárás mindig ilyen

bázisvektorokat eredményez). A skalárszorzat eltűnik, ha a két vektor bal, illetve jobb szintjei nem egyeznek meg, illetve ha $i \neq i'$:

$$\begin{aligned} (\Psi', \Psi) &= 0 \text{ ha} \\ &\quad m_1 + \dots + m_l \neq m'_1 + \dots + m'_{l'} \\ \text{vagy} &\quad n_1 + \dots + n_k \neq n'_1 + \dots + n'_{k'} \\ \text{vagy} &\quad i \neq i' \end{aligned}$$

Amennyiben a skalárszorzat a fenti feltételek alapján nem tűnik el, a következő rekurzív eljárást alkalmazhatjuk:

Válasszuk le az első (bal) Virasoro generátort Ψ' -ről és használjuk a (B.5) összefüggést:

$$\begin{aligned} \Psi' &= L_{-n'_1} \Psi'' \\ (\Psi', \Psi) &= (\Psi'', L_{n'_1} \Psi) \end{aligned}$$

A Virasoro algebra (B.4) relációi és a legmagasabb súlyú vektor (B.10) definíciója segítségével az $L_{n'_1} \Psi$ vektor kifejezhető (n'_1 -vel) alacsonyabb szintű vektorok lineáris kombinációjaként, mégpedig egyszerűen úgy, hogy az L operátorok index szerinti sorbarendezeit elvégezzük, minden felcserélésnél a megfelelő kommutációs relációt alkalmazva. Ezt az eljárást ismételjük, amíg a végén az összes L operátor el nem fogy, aztán hasonlóan járunk el az \bar{L} generátorokkal. A végeredmény az lesz, hogy a skalárszorzatot kifejezzük a legmagasabb súlyú állapot (B.11) normájával, amit pedig (B.15) alapján kifejezhetünk az operátorszorzat algebra (primér terek közötti) hárompont csatolásaival. A diagonális minimálmodellek esetén a hárompont csatolások Dotsenko és Fateev munkáiból [DF85, DF84] explicite ismertek; a jelen dolgozatban csak ilyenekkel foglalkozom. A hárompont csatolások konkrét felírásától a kifejezések bonyolult volta miatt itt most eltekintek.

A fenti eljárás szimbolikus algebra szoftverek (Maple, Mathematica) segítségével teljes mértékben automatizálható.

B.4. Leszármaztatott terek hárompont csatolásainak számítása

Legyenek

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_a(z, \bar{z}) &= (\bar{L}_{-m_1} \dots \bar{L}_{-m_l} L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \Phi_{i_1})(z, \bar{z}) \\ \mathcal{O}_b(z, \bar{z}) &= (\bar{L}_{-m'_1} \dots \bar{L}_{-m'_{l'}} L_{-n'_1} \dots L_{-n'_{k'}} \Phi_{i_2})(z, \bar{z}) \\ \mathcal{O}_c(z, \bar{z}) &= (\bar{L}_{-m''_1} \dots \bar{L}_{-m''_{l''}} L_{-n''_1} \dots L_{-n''_{k''}} \Phi_{i_3})(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

tetszőleges lokális konform terek, amelyek a Φ_{i_1} , Φ_{i_2} , Φ_{i_3} terek leszármaztatottai. A feladat a (B.8) operátorszorzat kifejtésben szereplő \mathcal{C}_{bc}^a operátorszorzat kifejtési együtthatók kifejezése a primér terek közti $C_{i_2 i_3}^{i_1}$ hárompont csatolással. Jelöljük az ezen operátorokhoz tartozó állapotokat a következőképpen:

$$|\Psi_a\rangle = \mathcal{O}_a(0)|0\rangle \quad , \quad |\Psi_b\rangle = \mathcal{O}_b(0)|0\rangle \quad , \quad |\Psi_c\rangle = \mathcal{O}_c(0)|0\rangle$$

ekkor B.1 alapján

$$\mathcal{C}_{bc}^a = \langle \Psi_a | \mathcal{O}_b(1) | \Psi_c \rangle$$

A belső szorzat B.3 alatt ismertetett kiszámításához hasonlóan most is a Virasoro algebra tulajdonságait fogjuk felhasználni. Először megszabadulunk a bal oldali vektoron szereplő L operátoroktól. Ha leválasztunk egy Virasoro generátort

$$|\Psi_a\rangle = L_{-m} |\Psi'_a\rangle \quad , \quad m \geq 1$$

akkor (B.14)-t felhasználva

$$C_{bc}^a = -\langle \Psi_a | \oint_{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{m+1} T(\zeta) \mathcal{O}_b(1) | \Psi_c \rangle$$

amit a kontúrt áthúзва a $z = 1$ és $z = 0$ -ban található szingularitások köré, és a radiális rendezést felhasználva a következő alakot ölti:

$$C_{bc}^a = \langle \Psi_a | \left(\oint_1 \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{m+1} T(\zeta) \mathcal{O}_b(1) \right) | \Psi_c \rangle + \langle \Psi_a | \mathcal{O}_b(1) \oint_0 \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{m+1} T(\zeta) | \Psi_c \rangle$$

Az első tagban a ζ^{-m-1} (nemnegatív kitevős) függvényt $\zeta = 1$ körül a binomiális tétel szerint sorba fejtve, a második tagban pedig direktben alkalmazhatjuk a (B.6) formulát, amivel a következő eredményt kapjuk:

$$C_{bc}^a = \sum_{k=-1}^m \binom{m+1}{k+1} \langle \Psi_a | (L_k \mathcal{O}_b(1)) | \Psi_c \rangle + \langle \Psi_a | \mathcal{O}_b(1) | L_m \Psi_c \rangle$$

Az ebben szereplő tagokat a skalárszorzat kiszámításánál ismertetett módon, a Virasoro algebra kommutációs relációt használva kifejezhetjük újra a (B.18)-hoz hasonló alakú operátorok hárompont függvényeinek kombinációjaként. Ezt ismételve, minden L generátort eltüntethetünk a bal oldali vektorról. Az \bar{L} generátorokkal hasonlóképpen járhatunk el (ez a későbbiekben is így lesz, ezért a releváns formulákat a továbbiakban csak az L generátorokra fogalmazzuk meg). Ennek eredményeként a hárompont csatolást kifejezhetjük

$$\langle \Phi_{i_1} | \mathcal{O}_{b'}(1) | \Psi_{c'} \rangle$$

alakú mátrix elemekkel, ahol a bal oldali vektor már primér.

Ezután hasonló módon megszabadulhatunk a jobb oldali vektor L és \bar{L} generátoraitól, a következő típusú (az előző gondolatmenethez hasonlóan származtatott) azonosságot használva

$$\langle \Phi_{i_1} | B(1) L_{-m} | C \rangle = - \sum_{k=-1}^{\infty} \binom{-m+1}{k+1} \langle \Phi_{i_1} | (L_k B)(1) | C \rangle \quad (\text{B.19})$$

ahol kihasználtuk, hogy a baloldali vektor már primér. A végtelen összegnek csak véges sok tagja ad járulékot, mert $L_k B \equiv 0$, ha k nagyobb B (baloldali) Virasoro leszármaztatási szintjénél. Ezzel

$$\langle \Phi_{i_1} | B(1) | \Phi_{i_3} \rangle$$

alakú mátrixelemekre jutunk, ahol most már csak a középső operátorról kell letávolítani a Virasoro generátorokat. Az erre szolgáló reláció

$$\langle \Phi_{i_1} | (L_{-m} B)(1) | \Phi_{i_3} \rangle = - \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{m+k} \binom{-m+1}{k+1} \langle \Phi_{i_1} | B(1) L_k | \Phi_{i_3} \rangle$$

Ettől a jobb oldali vektoron ismét megjelennek az L generátorok. Valójában csak az L_{-1} lép fel, mivel a jobb oldali vektor már primér, ezért L_k eltünteti, ha $k > 0$, ha pedig $k = 0$, akkor egyszerűen felveszi rajta a Δ_{i_3} sajátértéket. Az L_{-1} generátorokat (B.19) segítségével visszadobhatjuk középére.

A folyamat tehát véges sok lépésben véget ér, amennyiben figyelembe vesszük, hogy a középső vektorról azonban csak azokat az L_{-m} generátorokat érdemes eltávolítani, amelyekre $m \geq 2$. Ugyanis a fenti formulák alkalmazásával látható, hogy

$$\langle \Phi_{i_1} | (L_{-1} B)(1) | C \rangle = -\langle \Phi_{i_1} | B(1) L_{-1} | C \rangle$$

Ennek következtében az L_{-1} generátorok egyszerűen oda-vissza „pattognának” a középső és a jobb oldali mező között. Ez nem más, mint az elmélet eltolás invarianciájának kifejezése a hárompont csatolások szintjén. L_{-1} (és hasonlóan \bar{L}_{-1}) ugyanis nem más, mint a z (illetve \bar{z}) változóban vett eltolás generátora. Ha a fentieket követve minden L_{-1} (valamint \bar{L}_{-1}) operátort középére viszünk, akkor végeredményként a problémát

$$\langle \Phi_{i_1} | L_{-1}^n \bar{L}_{-1}^m \Phi_{i_2}(1) | \Phi_{i_3} \rangle$$

alakú mátrixelemek kiszámítására redukáltuk. Azonban tudjuk, hogy az eltolás generátorának hatása minden mezőre a következő alakú:

$$(L_{-1}B)(z, \bar{z}) = \partial_z B(z, \bar{z}) \quad , \quad (\bar{L}_{-1}B)(z, \bar{z}) = \partial_{\bar{z}} B(z, \bar{z})$$

valamint (B.9)-ből (B.13) felhasználásával

$$\langle \Phi_{i_1} | \Phi_{i_2}(z, \bar{z}) | \Phi_{i_3} \rangle = \text{const.} \cdot z^{\Delta_{i_1} - \Delta_{i_2} - \Delta_{i_3}} \bar{z}^{\bar{\Delta}_{i_1} - \bar{\Delta}_{i_2} - \bar{\Delta}_{i_3}}$$

így

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{i_1} | L_{-1}^n \bar{L}_{-1}^m \Phi_{i_2}(1) | \Phi_{i_3} \rangle &= (\Delta_{i_1} - \Delta_{i_2} - \Delta_{i_3}) \dots (\Delta_{i_1} - \Delta_{i_2} - \Delta_{i_3} - n + 1) \\ &\cdot (\bar{\Delta}_{i_1} - \bar{\Delta}_{i_2} - \bar{\Delta}_{i_3}) \dots (\bar{\Delta}_{i_1} - \bar{\Delta}_{i_2} - \bar{\Delta}_{i_3} - m + 1) \\ &\cdot \langle \Phi_{i_1} | \Phi_{i_2}(1) | \Phi_{i_3} \rangle \end{aligned}$$

és mivel a primér hárompont csatolás éppen

$$C_{i_2 i_3}^{i_1} = \langle \Phi_{i_1} | \Phi_{i_2}(1) | \Phi_{i_3} \rangle$$

ezzel a feladatot megoldottuk. A belső szorzat B.3 alatt ismertetett kiszámításához hasonlóan a hárompont csatolásokat Dotsenko és Fateev munkáiból [DF85, DF84] vehetjük.

Ez az eljárás is teljes mértékben automatizálható megfelelő szimbolikus algebra szoftverek (Maple, Mathematica) segítségével.

B.5. A szabad konform skalármező

Ebben a függelékben a $c = 1$ centrális töltésű konform térelmélet, azaz a szabad konform skalármező olyan alapvető összefüggéseit tárgyalom, amelyekre a tárgyalt eredmények ismertetésénél szükség lesz.

B.5.1. Kompakt szabad bozon periodikus határfeltételekkel

Tekintsünk egy szabad, zérus tömegű skalármezőt egy L méretű dobozban periodikus határfeltételekkel (azaz egy L kerületű körön), ami egy r sugarú körön veszi fel az értékeit (azaz kompakt); az r paramétert kompaktifikációs sugárnak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy a mezőnek ki kell elégítenie a következő kváziperiodikus határfeltételt:

$$\varphi(L, t) \equiv \varphi(0, t) + 2\pi r m$$

ahol $m \in \mathbb{Z}$ az ún. csavarodási szám. Az elmélet hatása

$$\mathcal{A} = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^L dx \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \quad (\text{B.20})$$

A kanonikus kvantálás eredményeként előálló kvantumozott mező módus kifejtése a következő:

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 + \frac{4\pi}{L} \left(\pi_0 t + \frac{rM}{2} x \right) + i \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \left(a_k e^{i \frac{2\pi}{L} k(x-t)} + \bar{a}_k e^{-i \frac{2\pi}{L} k(x+t)} \right)$$

ahol π_0 nem más, mint a kanonikusan konjugált mező

$$\pi(t, x) = \frac{1}{4\pi} \partial_t \varphi(t, x)$$

nullmódusa (a mezőimpulzus – nem tévesztendő össze a téridőbeli értelemben vett impulzussal!):

$$\pi_0 = \int_0^L \pi(t, x) dx$$

M a csavarodási operátor, aminek sajátértéke az m csavarodási szám, a nem eltűnő kommutátorok pedig

$$[\varphi_0, \pi_0] = i \quad ; \quad [a_k, a_l] = k\delta_{k+l} \quad , \quad [\bar{a}_k, \bar{a}_l] = k\delta_{k+l} \quad (\text{B.21})$$

A Hamilton függvény ζ -függvény regularizációval számolható:

$$H = \frac{2\pi}{L} \left(\pi_0^2 + \left(\frac{rM}{2} \right)^2 + \sum_{k>0} a_{-k} a_k + \sum_{k>0} \bar{a}_{-k} \bar{a}_k - \frac{1}{12} \right)$$

Átírva a $\tau = it$ euklidészi időre és a $\xi = \tau - ix, \bar{\xi} = \tau + ix$ komplex koordinátákat bevezetve, a rendszert a $\xi \rightarrow z = e^{\frac{2\pi}{L}\xi}$ leképezéssel átvihetjük a komplex síkra (2.2 ábra), ahol a mezőt szétbonthatjuk holomorf és antiholomorf komponensekre:

$$\begin{aligned} \varphi(z, \bar{z}) &= \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) \\ \phi(z) &= \phi_0 - ia_0 \ln z + i \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \frac{z^{-k}}{k} \quad ; \quad \bar{\phi}(\bar{z}) = \bar{\phi}_0 - i\bar{a}_0 \ln \bar{z} + i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{a}_n \frac{\bar{z}^{-k}}{k} \\ a_0 &= \pi_0 + \frac{rM}{2} \quad , \quad \bar{a}_0 = \pi_0 - \frac{rM}{2} \quad , \quad \phi_0 + \bar{\phi}_0 = \varphi_0 \end{aligned}$$

Hasznos bevezetni a duális mezőt a

$$\tilde{\varphi}(z, \bar{z}) = \phi(z) - \bar{\phi}(\bar{z})$$

összefüggéssel, amelynek nullmódusa

$$\tilde{\varphi}_0 = \phi_0 - \bar{\phi}_0$$

nem fordul elő az eredeti φ bozontérben, tehát az eredeti operátoralgebra kiterjesztésének tekinthető (az összes többi módus kifejezhető φ módusaival).

Ez a konform térelmélet a Virasoro algebra mellett invariáns az $\hat{U}(1) \times \hat{U}(1)$ áramalgebra (Kac-Moody algebra) alatt, amit a

$$J(z) = i\partial_z \phi(z) \quad , \quad \bar{J}(\bar{z}) = i\partial_{\bar{z}} \bar{\phi}(\bar{z})$$

királis áramok generálnak. Ezek módusai éppen az a_n és \bar{a}_n operátorok, a két megmaradó $U(1)$ töltés operátora pedig az a_0 és \bar{a}_0 nullmódus operátorokkal azonos.

Egy $\Phi(z, \bar{z})$ mezőt az áramalgebrára nézve primér térnek nevezünk, ha az áramokkal vett operátorszorzataira a

$$\begin{aligned} J(z)\Phi(w, \bar{w}) &= \frac{q_\Phi \Phi(w, \bar{w})}{z - w} + O(1) \\ \bar{J}(\bar{z})\Phi(w, \bar{w}) &= \frac{\bar{q}_\Phi \Phi(w, \bar{w})}{\bar{z} - \bar{w}} + O(1) \end{aligned}$$

összefüggések teljesülnek, ahol q_Φ és \bar{q}_Φ a Φ mező $U(1)$ töltései. A Virasoro algebrát a

$$T(z) = \frac{1}{2} : J(z)J(z) : \quad , \quad \bar{T}(\bar{z}) = \frac{1}{2} : \bar{J}(\bar{z})\bar{J}(\bar{z}) :$$

alakban adott konform energia-impulzus tenzor generálja, ami alatt a $\Phi(z, \bar{z})$ a B.1 alatt definiált értelemben is primér tér, mégpedig $\Delta_\Phi = \frac{q_\Phi^2}{2}$, $\bar{\Delta}_\Phi = \frac{\bar{q}_\Phi^2}{2}$ konform súlyokkal. A Virasoro generátorok kifejezése a módusokkal:

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} : a_{n-k} a_k : \quad , \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} : \bar{a}_{n-k} \bar{a}_k :$$

A fenti modellben az áramalgebrára nézve primér terek összességét a

$$V_{(n,m)}(z, \bar{z}) = : e^{i\frac{n}{r}\varphi(z, \bar{z}) + i\frac{mr}{2}\tilde{\varphi}(z, \bar{z})} : = : e^{iq\phi(z) + i\bar{q}\bar{\phi}(\bar{z})} : \quad (\text{B.22})$$

vertex operátorok adják ¹, ahol q és \bar{q} nem más, mint az $U(1)$ töltések sajátértékei. A továbbiakban mind az (n, m) , mind pedig a (q, \bar{q}) parametrizációt használni fogjuk, a kettő közti összefüggés:

$$q = \frac{n}{r} + \frac{mr}{2} \quad , \quad \bar{q} = \frac{n}{r} - \frac{mr}{2}$$

A vertex operátorok operátorszorzat kifejtésének vezető tagja

$$\begin{aligned} V_{(q,\bar{q})}(z, \bar{z}) V_{(q',\bar{q}')}(\bar{w}, w) &= (z - w)^{qq'} (\bar{z} - \bar{w})^{\bar{q}\bar{q}'} : V_{(q,\bar{q})}(z, \bar{z}) V_{(q',\bar{q}')}(\bar{w}, w) : \\ &= (z - w)^{qq'} (\bar{z} - \bar{w})^{\bar{q}\bar{q}'} V_{(q+q', \bar{q}+\bar{q}')}(\bar{w}, w) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

A Hilbert-tér Fock modulokból épül fel, amelyek alapállapotai a vákuumból a következőképpen állítható elő:

$$|n, m\rangle = V_{(n,m)}(0, 0)|0\rangle = e^{i\frac{n}{r}\varphi_0} e^{i\frac{mr}{2}\tilde{\varphi}_0}|0\rangle$$

Az ilyen állapotokra a következők teljesülnek:

$$\begin{aligned} \pi_0 |n, m\rangle &= \frac{n}{r} |n, m\rangle \quad , \quad M |n, m\rangle = m |n, m\rangle \\ a_k |n, m\rangle &= 0 = \bar{a}_k |n, m\rangle \quad , \quad k > 0 \end{aligned}$$

(az áramalgebra nyelvén ezt úgy mondjuk, hogy az $|n, m\rangle$ állapot egy legmagasabb súlyú vektor). Az első összefüggés konzisztens azzal, hogy π_0 nem más, mint a φ_0 -hoz kanonikusan konjugált impulzus; a második ugyanilyen relációt mutat $\tilde{\varphi}_0$ és $\frac{Mr}{2}$ között. A fentiek következtében fennállnak az

$$e^{i\frac{n'}{r}\varphi_0} |n, m\rangle = |n + n', m\rangle \quad , \quad e^{i\frac{m'r}{2}\tilde{\varphi}_0} |n, m\rangle = |n, m + m'\rangle \quad (\text{B.24})$$

összefüggések is ².

Az $\mathcal{F}_{n,m}$ Fock modul, amelynek bázisát a

$$a_{-k_1} \dots a_{-k_r} \bar{a}_{-l_1} \dots \bar{a}_{-l_s} |n, m\rangle \quad (\text{B.25})$$

vektorok alkotják, nem más, mint az áramalgebra egy (legmagasabb súlyú) irreducibilis ábrázolása. A teljes Hilbert teret ilyen modulok direkt összegeként építhetjük fel:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{(n,m) \in S} \mathcal{F}_{n,m} \quad (\text{B.26})$$

¹ A kettősponttal jelölt normálrendezést úgy kell érteni, hogy $k \geq 1$ esetben a_{-k} balra áll a_k -tól, q pedig ugyancsak balra p -tól.

² Látható, hogy ϕ és $\tilde{\phi}$ (és ezzel együtt az n mezőimpulzus és az m csavarodási szám) szerepe teljesen felcserélhető, ha ezzel egyidőben végrehajtjuk az $r \rightarrow 2/r$ helyettesítést. Ez a húrelméleti irodalomban ismert T -dualitás legegyszerűbb példája.

Az operátor algebra lokalitása megszorítja az (n, m) kvantumszámok lehetséges spektrumát. Amennyiben megengedünk nemtriviális ($m \neq 0$) csavarodási számokat, akkor r generikus értékeinél csak két inekvivalens lehetőség van [KM93]:

$$S = \begin{cases} S_B &= \{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \\ S_F &= \{(n, m) : n \in \mathbb{Z}, m \in 2\mathbb{Z} \text{ vagy } n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, m \in 2\mathbb{Z} + 1\} \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

Mivel a $V_{(n,m)}$ operátor konform spinje

$$\Delta_{(n,m)} - \bar{\Delta}_{(n,m)} = nm$$

az S_B algebra teljes mértékben bozonikus. Az S_F algebrát az operátorszorzatra nézve a $V_{\pm\frac{1}{2}, \pm 1}$ fermionikus operátorok generálják, amelyek pontosan egy Dirac spinor négy komponensét adják: az $n = \pm\frac{1}{2}$ a spinnek, az $m = \pm 1$ a részecske/antirészecske indexnek feleltethető meg.

B.5.2. Konform invariáns határfeltételek

Ha a kompakt bozon egy L kerületű kör (periodikus határfeltétel) helyett egy intervallumon definiált, akkor feltehetjük azt a kérdést: milyen határfeltételek őrzik meg a modell áramalgebra szimmetriáját. A konform szimmetria felhasználásával ezt a kérdést feltehetjük a komplex felső félsíkon is: a határfeltételek ekkor olyanok kell legyenek, hogy

$$L(z) = \bar{L}(\bar{z}) \quad , \quad J(z) = \Omega \bar{J}(\bar{z}) \quad ;$$

teljesüljön a valós egyenesen ($z = \bar{z}$) ahol Ω a (B.21) algebra automorfizmusa [PZ00]. A lehetséges választások: $\Omega = 1$ vagy $\Omega = -1$ [RS99]. Az első esetben a φ mező Neumann, a második esetben Dirichlet határfeltételnek tesz eleget. A duális mezőre ez a kettő szerepet cserél, azaz $\Omega = 1$ tartozik a Dirichlet, míg $\Omega = -1$ a Neumann határfeltételhez.

B.5.2.1. Neumann határfeltétel

A módusokra nézve az $\Omega = 1$ határfeltétel az $\bar{a}_n = a_n$ relációhoz vezet:

$$\varphi(z, \bar{z}) = \varphi_0 - ia_0(\ln z + \ln \bar{z}) + i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{n} (z^{-n} + \bar{z}^{-n}) .$$

A valós Minkowski téridőbe a következő módon térhetünk vissza. A $0 \leq x \leq L$, $-\infty < t < \infty$ sávon bevezetve a $\tau = it$ euklidészi időt és a $\xi = \tau - ix$ komplex koordinátát, a $\xi \rightarrow z = e^{\frac{\pi}{L}\xi}$ transzformáció a z változóban a felső félsíkra képezi (8.1 ábra). Ennek segítségével kifejezhetjük a skalármezőt a sávon:

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 + \frac{4\pi}{L} \pi_0 t + \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} (e^{i\frac{\pi}{L}n(x-t)} + e^{-i\frac{\pi}{L}n(x+t)}) \quad (\text{B.28})$$

Az x -függés világosan mutatja, hogy Neumann határfeltételek teljesülnek:

$$\partial_x \varphi(0, t) = \partial_x \varphi(L, t) = 0 \quad ; \quad \forall t$$

A Hamilton operátor (B.28)-ből kapható (ζ -függvény regularizációval)

$$H_N = \frac{2\pi}{L} \pi_0^2 + \frac{\pi}{L} \left(\sum_{n \neq 0} n a_{-n} a_n - \frac{1}{24} \right) \quad (\text{B.29})$$

Visszatérve a síkra, egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy a naív exponenciális alakban definiált $V_{(n,0)}(z, \bar{z})$ operátorszorzatának vezető tagja nem egyezik meg a (B.23) alatti eredménnyel, és emellett nem is viselkedik primér térként az energia-impulzus tenzorral vett

operátorszorzatát tekintve. Mivel azonban a vertex operátor ezen tulajdonságai teljes egészében csak a lokális viselkedés függvénye, ezért amennyiben ténylegesen a $V_{(n,0)}$ vertex operátor peremes megfelelőjét keressük, az operátor normálását megfelelően módosítani kell (ami a normálrendezés átdefiniálásával lehetséges):

$$V_{(n,0)}(z, \bar{z}) = |z - \bar{z}|^{q^2} : e^{iq\varphi(z, \bar{z})} : \quad ; \quad q = \frac{n}{r} \quad (\text{B.30})$$

Ezek az operátorok már primér terek, és konform súlyuk megegyezik a síkon felvett $\frac{q^2}{2}$ értékkel, valamint operátorszorzatuk is pontosan megfelel a (B.23) alattinak.

A peremes konform térelméletben vannak a határon lokalizált mezők is, és az elmélet állapottere ezekkel hozható egy-egy értelmű kapcsolatba. A jelen esetben ezek a peremes vertex operátorok

$$\Psi_n(x) = : e^{i\frac{n}{r}\varphi(z, \bar{z})}|_{z=\bar{z}=x} : \quad (\text{B.31})$$

Ezek a konform szimmetriának az a része ábrázolódik, ami a peremet (a valós egyenest) önmagára képezi. Ez a síkon definiált kettős Virasoro algebrával szemben a Virasoro algebra egyetlen kópiájaként áll elő, ami alatt a fenti operátor $h_n = 2\frac{n}{r^2}$ súlyú primér térként transzformálódik. A duális mező a peremen eltűnik, és ennek megfelelően a peremes Hilbert-térben nincsenek csavarodási számmal jellemezhető szektorok. A teljes peremes állapottér a következőképpen áll elő Fock modulok direkt összegeként:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^N \\ \mathcal{F}_n^N &= \text{span} \{a_{-k_1} \dots a_{-k_r} |n\rangle\} \\ |n\rangle &= \Psi_n(0)|0\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

További részletek tekintetében Recknagel és Schomerus munkájára [RS99] utalok.

B.5.2.2. Dirichlet határfeltétel

Az $\Omega = -1$ határfeltétel eredményeképpen $\varphi(z, \bar{z})$ a következő alakot ölti:

$$\varphi(z, \bar{z}) = \varphi_0 - ia_0(\ln z - \ln \bar{z}) + i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{n} (z^{-n} - \bar{z}^{-n})$$

A sávon fennálló határfeltételt itt is úgy lehet meghatározni, ha visszaképezzük a rendszert a $\xi \rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{L}\xi}$ leképezés inverzével. Ekkor

$$\varphi(x, t) = \phi_0 + \frac{2\pi}{L} r M x - i \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} \left(e^{i\frac{\pi}{L}n(x-t)} - e^{-i\frac{\pi}{L}n(x+t)} \right) \quad (\text{B.33})$$

ahol $M = \frac{\phi_L - \phi_0}{2\pi r}$. Látható, hogy φ kielégíti a

$$\varphi(0, t) = \phi_0 \quad ; \quad \varphi(L, t) = \phi_L \quad \forall t$$

Dirichlet határfeltételeket, ahol ϕ_0 és ϕ_L a mező peremen felvett értékét megadó c -számok. A Hamilton operátor kifejezése a módusokkal

$$H_D = \frac{2\pi}{L} \left(\frac{rM}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{L} \left(\sum_{n \neq 0} n a_{-n} a_n - \frac{1}{24} \right) \quad (\text{B.34})$$

A vertex operátorokat ezúttal a következőképpen kell átdefiniálni:

$$V_{(n,0)}(z, \bar{z}) = |z - \bar{z}|^{-q^2} : e^{iq\varphi(z, \bar{z})} : \quad ; \quad q = \frac{n}{r} \quad (\text{B.35})$$

Mivel φ a határon egy c -szám, a (B.31) alatti peremes vertex operátorok triviálisak. A Hilbert-tér tehát egyetlen Fock modulból áll:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{F}_{\phi_0, \phi_L}^D \\ \mathcal{F}_{\phi_0, \phi_L}^D &= \text{span} \{a_{-k_1} \dots a_{-k_r} |0\rangle_{\phi_0, \phi_L}\} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

B.6. Vertex operátorok mátrixelemeinek számítása

B.6.1. Periodikus határfeltételek

Ahhoz, hogy a csonkolt konform állapottér módszerét a $c = 1$ konform térelmélet perturbációra alkalmazhassuk, (4.5) alapján a következő mátrixelemekre van szükségünk:

$$\langle \Phi' | V_{(a,0)}(1,1) | \Phi \rangle$$

ahol $V_{(a,0)}(z, \bar{z})$ a (B.22) alatt definiált vertex operátor,

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \frac{1}{N_\Phi} \prod_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{r_k} \bar{a}_{-k}^{s_k} |n, m\rangle \\ |\Phi'\rangle &= \frac{1}{N_\Psi} \prod_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{r'_k} \bar{a}_{-k}^{s'_k} |n', m'\rangle \end{aligned}$$

a szabad bozon (B.26) Hilbert-terének két bázisvektora, amiket most úgy paraméterezünk, hogy megadjuk a jobb/bal oszcillátorok r_k, s_k (illetve r'_k, s'_k) betöltési számait, amelyek minden vektor esetén csak véges sok oszcillátorra különböznek nullától, így a fenti szorzatok végesek, N_Φ és N_Ψ pedig pozitív valós számok, amiket úgy választunk meg, hogy a vektorok normája egységnyi legyen. Ennek következtében az ilyen vektorok ortonormált bázist alkotnak:

$$\langle \Phi' | \Phi \rangle = \delta_{n n'} \delta_{m m'} \prod_{k=1}^{\infty} \delta_{r_k r'_k} \delta_{s_k s'_k}$$

Expliciten

$$\begin{aligned} V_{(a,0)}(1,1) &= e^{i\alpha\varphi_0} \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha \frac{a_{-k}}{k}} e^{\alpha \frac{a_k}{k}} e^{-\alpha \frac{\bar{a}_{-k}}{k}} e^{\alpha \frac{\bar{a}_k}{k}} \\ \alpha &= \frac{a}{r} \end{aligned}$$

Látható, hogy minden mátrixelem számítása módusenként faktorizálódik. A normálási faktorok (a (B.21) csererelációk felhasználásával) a következőképpen számíthatók:

$$N_\Phi^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{r_k} a_{-k}^{r_k} \rangle \langle \bar{a}_k^{s_k} \bar{a}_{-k}^{s_k} \rangle = \prod_{k=1}^{\infty} (r_k! k^{r_k}) (s_k! k^{s_k}) \quad (\text{B.37})$$

ahol $\langle \dots \rangle$ a módusenkénti átlagot jelöli. A vertek operátorok mátrixelemei pedig a következőképpen írhatók:

$$\langle \Phi' | V_{(a,0)}(1,1) | \Phi \rangle = N_\Phi^{-1} N_\Psi^{-1} \delta_{n', n+a} \delta_{m', m} \prod_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{r'_k} e^{-\alpha \frac{a_{-k}}{k}} e^{\alpha \frac{a_k}{k}} a_{-k}^{r_k} \rangle \langle \bar{a}_k^{s'_k} e^{-\alpha \frac{\bar{a}_{-k}}{k}} e^{\alpha \frac{\bar{a}_k}{k}} \bar{a}_{-k}^{s_k} \rangle$$

ahol felhasználtuk (B.24)-t. Egy módus járuléka pedig az

$$\begin{aligned} \langle a_k^{r'_k} e^{-\alpha \frac{a_{-k}}{k}} e^{\alpha \frac{a_k}{k}} a_{-k}^{r_k} \rangle &= \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j'}}{j! j'!} \left(\frac{\alpha}{k} \right)^{j+j'} \langle a_k^{r'_k} a_{-k}^{j'} a_k^j a_{-k}^{r_k} \rangle \\ \langle a_k^{r'_k} a_{-k}^{j'} a_k^j a_{-k}^{r_k} \rangle &= k^{j+j'} \binom{r'_k}{j} \binom{r_k}{j'} j! j'! (r_k - j)! k^{r_k-j} \delta_{r_k-j, r'_k-j'} \end{aligned}$$

formulákkal számítható. A minimálmodellek esetével szemben (ld. B.3 és B.4) a fenti képletek egyszerűen implementálhatók közvetlenül \mathbb{C} nyelven, mindenféle szimbolikus algebra szoftver közbeiktatása nélkül, ami azonban szükséges is, mert a kellő pontosságot csak a minimálmodellekénél jóval nagyobb dimenziószámú csonkolt állapottérrel lehet elérni.

B.6.2. Vertex operátorok mátrixelemei a peremes esetben

Az alábbiakban megadjuk a csonkolt konform állapotter módszer alkalmazásához szükséges mátrixelemek kiszámításának módszerét Neumann és Dirichlet határfeltétel esetére.

B.6.2.1. Neumann határfeltétel

Ebben az esetben a (B.32) Hilbert-tér két bázisvektora legyen

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \frac{1}{N_\Phi} \prod_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{r_k} |n\rangle \\ |\Phi'\rangle &= \frac{1}{N_{\Psi'}} \prod_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{r'_k} |n'\rangle \end{aligned}$$

normájuk a (B.37) kifejezéssel analóg módon

$$N_\Phi^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{r_k} a_{-k}^{r_k} \rangle = \prod_{k=1}^{\infty} (r_k! k^{r_k})$$

Ezúttal kétféle mátrixelemet kell kiszámolni. A sáv belsejében elhelyezkedő („bulk”) vertex operátorok mindig a térben kiintegrálva jelennek meg:

$$B_{\Phi\Phi'}^{(a)} = \frac{1}{L} \int_0^L dx \langle \Phi' | V_{(a,0)}(z, z^*) | \Phi \rangle \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{L}x}} \quad (\text{B.38})$$

a peremes vertex operátorok ellenben $x = 0$ vagy $x = L$ pozícióban

$$C_{\Phi\Phi'}^{(a)\pm} = \langle \Phi' | : e^{i\frac{a}{r}\varphi(z, \bar{z})} : | \Phi \rangle \Big|_{z=\pm 1} \quad (\text{B.39})$$

(mindenütt $t = 0$). (B.28) és (B.30) alapján

$$\begin{aligned} V_{(a,0)} \left(e^{i\frac{\pi}{L}x}, e^{-i\frac{\pi}{L}x} \right) &= \left(2 \sin \frac{\pi x}{L} \right)^{\alpha^2} e^{i\alpha\varphi_0} \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha \frac{a-k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} + e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} e^{\alpha \frac{a_k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} + e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} \\ \alpha &= \frac{a}{r} \end{aligned}$$

ahonnan

$$B_{\Phi\Phi'}^{(a)} = N_\Phi^{-1} N_{\Phi'}^{-1} \delta_{n', n+a} \frac{1}{L} \int_0^L dx \left(2 \sin \frac{\pi x}{L} \right)^{\alpha^2} \prod_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{r'_k} e^{-\alpha \frac{a-k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} + e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} e^{\alpha \frac{a_k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} + e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} a_{-k}^{r_k} \rangle$$

valamint

$$\begin{aligned} \langle a_k^{r'_k} e^{-\alpha \frac{a-k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} + e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} e^{\alpha \frac{a_k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} + e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} a_{-k}^{r_k} \rangle &= \\ \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j'}}{j! j'} \left(\frac{\alpha}{k} \right)^{j+j'} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} + e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)^{j+j'} \langle a_k^{r'_k} a_{-k}^{j'} a_k^j a_{-k}^{r_k} \rangle \end{aligned}$$

és

$$\langle a_k^{r'_k} a_{-k}^{j'} a_k^j a_{-k}^{r_k} \rangle = k^{j+j'} \binom{r_k}{j} \binom{r'_k}{j'} j! j'! (r_k - j)! k^{r_k-j} \delta_{r_k-j, r'_k-j'}$$

Az elvégzendő integrálok pedig visszavezethetők a következő összefüggésre:

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx \left(\sin \frac{\pi x}{L} \right)^{\alpha^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} \right)^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dy y^{\frac{\alpha^2-1}{2}} (1-y)^{\frac{k-1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{k}{2}\right)} \quad (\text{B.40})$$

A peremes vertex operátorok a sáv két szélén a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned} x=0 : \quad & : e^{i\alpha\varphi(1,1)} := e^{i\alpha\varphi_0} \prod_{k=1}^{\infty} e^{-2\alpha\frac{a-k}{k}} e^{2\alpha\frac{a_k}{k}} \\ x=L : \quad & : e^{i\alpha\varphi(-1,-1)} := e^{i\alpha\varphi_0} \prod_{k=1}^{\infty} e^{-2(-1)^k\alpha\frac{a-k}{k}} e^{2\alpha(-1)^k\frac{a_k}{k}} \end{aligned}$$

(B.39) mátrixelemeinek kiszámítását nem részletezzük, a B.6.1 alatt leírt módszerek alkalmazásával egyszerűen adódnak.

B.6.2.2. Dirichlet határfeltétel

(B.36) alapján az állapotok alakja

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \frac{1}{N_\Phi} \prod_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{r_k} |0\rangle \\ |\Phi'\rangle &= \frac{1}{N_{\Psi'}} \prod_{k=1}^{\infty} a_{-k}'^{r_k'} |0\rangle \\ N_\Phi^2 &= \prod_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{r_k} a_{-k}^{r_k} \rangle = \prod_{k=1}^{\infty} (r_k! k^{r_k}) \end{aligned}$$

a szükséges mátrixelemek pedig

$$B_{\Phi\Phi'}^{(a)} = \frac{1}{L} \int_0^L dx \langle \Phi' | V_{(a,0)}(z, z^*) | \Phi \rangle \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{L}x}} \quad (\text{B.41})$$

(B.33) és (B.35) alapján

$$\begin{aligned} V_{(a,0)} \left(e^{i\frac{\pi}{L}x}, e^{-i\frac{\pi}{L}x} \right) &= \left(2 \sin \frac{\pi x}{L} \right)^{-\alpha^2} e^{i\alpha(\phi_0 + \frac{2\pi}{L} r M x)} \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha\frac{a-k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} - e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} e^{\alpha\frac{a_k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} - e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} \\ \alpha &= \frac{a}{r} \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} B_{\Phi\Phi'}^{(a)} &= N_\Phi^{-1} N_{\Phi'}^{-1} \frac{1}{L} \int_0^L dx \left(2 \sin \frac{\pi x}{L} \right) e^{i\alpha\left(\phi_0 + \frac{\phi_L - \phi_0}{L} x\right)} \prod_{k=1}^{\infty} \langle a_k^{r_k'} e^{-\alpha\frac{a-k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} - e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} e^{\alpha\frac{a_k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} - e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} a_{-k}^{r_k} \rangle \\ &\quad \langle a_k^{r_k'} e^{-\alpha\frac{a-k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} - e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} e^{\alpha\frac{a_k}{k} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} - e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)} a_{-k}^{r_k} \rangle = \\ &\quad \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j'}}{j! j'} \left(\frac{\alpha}{k} \right)^{j+j'} \left(e^{ik\frac{\pi x}{L}} - e^{-ik\frac{\pi x}{L}} \right)^{j+j'} \langle a_k^{r_k'} a_{-k}^{j'} a_k^j a_{-k}^{r_k} \rangle \end{aligned}$$

és

$$\langle a_k^{r_k'} a_{-k}^{j'} a_k^j a_{-k}^{r_k} \rangle = k^{j+j'} \binom{r_k}{j} \binom{r_k'}{j'} j! j'! (r_k - j)! k^{r_k-j} \delta_{r_k-j, r_k'-j'}$$

az integrálok pedig (B.40)-hoz hasonlóan számolhatók.

C. Integrálható kvantumtérelméletek

C.1. Integrálható elméletek S mátrixa

C.1.1. Az egzakt S mátrix elmélet alapjai

Az egzakt S -mátrix elméletet („ S matrix bootstrap”) A. B. Zamolodchikov és Al. B. Zamolodchikov fogalmazta meg [ZZ79]. Egy kvantumtérelméletet akkor nevezünk integrálhatónak, ha létezik végtelen sok, egymással kommutáló, egynél magasabb Lorentz spinű megmaradó mennyiség, amelyek megmaradó lokális áramokból származtatott sűrűség integráljaként állnak elő (olyan mindig van, ami egyes spinnel rendelkezik, ez maga a szokásos energia és impulzus). Ha egy általános szórásfolyamatot (C.1 (a) ábra)

$$A_{k_1}(p_1) + \cdots + A_{k_n}(p_n) \rightarrow A_{l_1}(q_1) + \cdots + A_{l_m}(q_m)$$

tekintünk, akkor a magasabb spinű megmaradó mennyiségek annyira megszorítják a folyamatot, hogy

1. a részecskék száma nem változhat, $m = n$;
2. a bemenő és kimenő impulzusok halmaza megegyezik:

$$\{p_1, \dots, p_n\} = \{q_1, \dots, q_m\}$$

3. az előző pont következtében részecske típus váltó folyamatok csak akkor lehetségesek, ha vannak azonos tömegű, de különböző típusú részecskék, és ilyenkor egy adott részecske csak vele megegyező tömegűbe alakulhat át;
4. a sokrészecske folyamat amplitúdója kétrészecske szórások egymásutánjaként állítható elő, az S mátrixot tehát a kétrészecske amplitúdók összessége teljesen meghatározza.

A részecskék energiáját és impulzusát a (A.5)-nek megfelelően a θ rapiditással paraméterezzük. A Lorentz-invariancia következtében a szórás amplitúdók csak a relatív rapiditásoktól függenek.

Amennyiben minden lehetséges tömegértékhez csak egy részecske típus tartozik, akkor a kétrészecske amplitúdók mindegyike egy, a részecskék rapiditásától függő komplex skalár. Az $A_a(\theta_a) + A_b(\theta_b) \rightarrow A_a(\theta_a) + A_b(\theta_b)$ folyamat során nem történik más, mint hogy a részecskék fázistolást szenvednek:

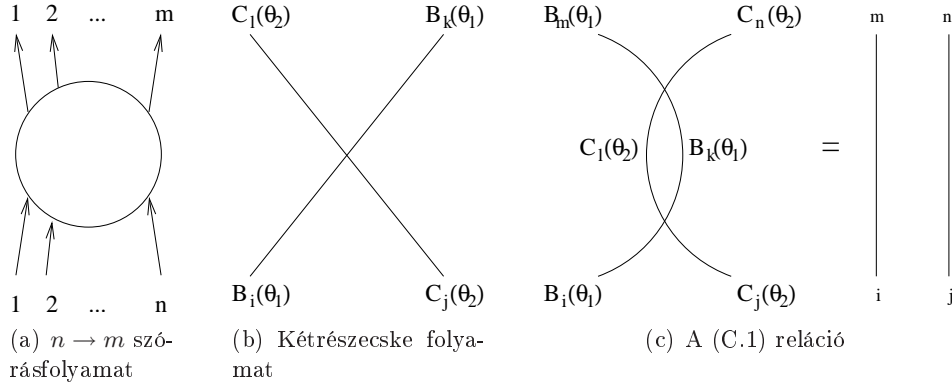
$$S_{ab}(\theta_a - \theta_b) = e^{i\delta_{ab}(\theta_a - \theta_b)}$$

Egy adott multipletthez tartozó, egymással tömegben degenerált részecskék szórása egy mátrixszal jellemezhető. Legyen a két multiplett a B és C , ekkor az $A_{B_i}(\theta_1) + A_{C_j}(\theta_2) \rightarrow A_{B_k}(\theta_1) + A_{C_l}(\theta_2)$ folyamatokat az i, j, k, l multiplett indexek tetszőleges értékeire tekintve, az amplitúdók a következőképpen írhatók:

$$S_{BC}(\theta_1 - \theta_2)_{ij}^{kl}$$

Ennek grafikus reprezentációja a C.1 (b) ábrán látható. Az analitikus S mátrix elmélet axiómái a következők:

1. A kétrészecske S mátrix amplitúdók a komplex rapiditás paraméter meromorf függvényei a $0 \leq \Im m\theta \leq \pi$ sávban. Minden ebben a sávban az imaginárius tengely mentén található pólus fizikai eredetű, azaz vagy egy kötött állapothoz, vagy egy úgynevezett Coleman-Thun diagramhoz tartozik [CT78], ami a négydimenziós térelméletekből ismert anomális küszöb szingularitások kétdimenziós megfelelője.



C.1. ábra.

2. A kétrészecske S -mátrixok eleget tesznek az

$$\sum_{k,l} S_{BC}(\theta)_{ij}^{kl} S_{CB}(-\theta)_{lk}^{nm} = \delta_i^m \delta_j^n \quad (C.1)$$

feltételnek (C.1 (c) ábra). Amennyiben a kétrészecske S mátrix ezenfelül teljesíti a

$$\left(S_{BC}(\theta)_{ij}^{kl} \right)^* = S_{CB}(-\theta^*)_{lk}^{ji} \quad (C.2)$$

ún. hermitikus analiticitási feltételt [Mir99] akkor S_{BC} egyben egy unitér mátrix, azaz (valós θ -ra, azaz a fizikai tartományban)

$$\sum_{k,l} \left(S_{BC}(\theta)_{ij}^{kl} \right)^* S_{BC}(\theta)_{i'j'}^{kl} = \delta_{i'}^i \delta_{j'}^j \quad (C.3)$$

Ez minden unitér kvantumtérelméletben teljesül, de fordítva ez nem igaz: a kétrészecske S mátrix lehet unitér anélkül, hogy a teljes sokrészecske S mátrix unitér lenne. Erre látunk majd példát a skálázó Lee-Yang modell esetén. Ha a modell időtükrözésre invariáns:

$$S_{CB}(\theta)_{lk}^{ji} = S_{BC}(\theta)_{ij}^{kl}$$

akkor a hermitikus analiticitás ekvivalens a közismertebb valós analiticitással:

$$\left(S_{BC}(\theta)_{ij}^{kl} \right)^* = S_{BC}(-\theta^*)_{ij}^{kl}$$

3. A kétrészecske S mátrixok eleget tesznek a keresztezési relációnak:

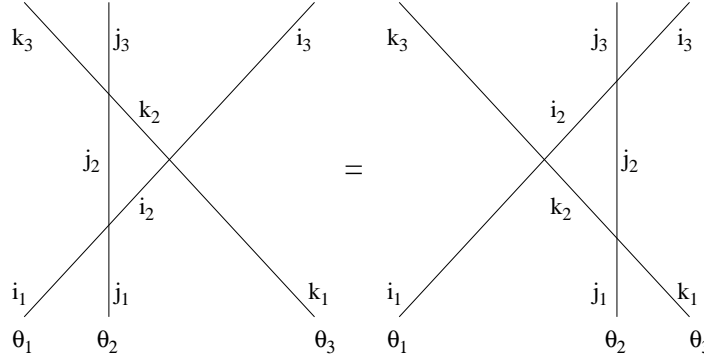
$$S_{BC}(i\pi - \theta)_{ij}^{kl} = \sum_{j'l'} \mathcal{C}_{jj'}^B \mathcal{C}_{ll'}^C S_{CB}(\theta)_{l'i}^{j'k} \quad (C.4)$$

ahol \mathcal{C}^B és \mathcal{C}^C a B és C multiplettire érvényes töltéstükrözési mátrixok.

4. Az S mátrixok eleget tesznek a faktorizációs (Yang-Baxter) egyenletnek (C.2 ábra)

$$\begin{aligned} S_{CD}(\theta_2 - \theta_3)_{j_2 k_2}^{j_3 k_3} S_{BD}(\theta_1 - \theta_3)_{i_2 k_1}^{i_3 k_2} S_{BC}(\theta_1 - \theta_2)_{i_1 j_1}^{i_2 j_2} = \\ S_{BC}(\theta_1 - \theta_2)_{i_2 j_2}^{i_3 j_3} S_{BD}(\theta_1 - \theta_3)_{i_1 k_2}^{i_2 k_3} S_{CD}(\theta_2 - \theta_3)_{j_1 k_1}^{j_2 k_2} \end{aligned} \quad (C.5)$$

amelyek azzal kapcsolatosak, hogy minden háromrészecske folyamatot kétféleképpen is fel lehet írni kétrészecske folyamatok egymásutánjaként, de ennek a két felírásnak meg kell egyeznie. Itt az ismétlődő indexekre összegzést kell érteni.



C.2. ábra. A Yang-Baxter egyenlet

5. A kötött állapotok az őket alkotó részecskékhez hasonlóan részei az elmélet spektrumának („nukleáris demokrácia”). A kötött állapotok S mátrixát az összetevők S mátrixa egyértelműen meghatározza. Az ezt leíró fúziós („bootstrap”) reláció felírásától most eltekintek, az irodalomban (pl. a Zamolodchikov testvérek fentebb hivatkozott cikkében) megtalálható.

A töltéskonjugálás (C), tértükrözés (P) és időtükrözés (T) hatása a kétrészecske S mátrixon a következőképpen adható meg:

$$S_{AB}(\theta)_{ij}^{kl} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & C & P & T \\ \hline & S_{\overline{A}\overline{B}}(\theta)_{\overline{i}\overline{j}}^{\overline{k}\overline{l}} & S_{BA}(\theta)_{ji}^{lk} & S_{BA}(\theta)_{lk}^{ji} \end{array} \quad (C.6)$$

ahol most az egyszerűség kedvéért a C töltéskonjugálás mátrixok explicit kiírása helyett egyszerűen felülvonással jelöltem az antirészecskét.

Egy integrálható relativisztikus kvantumtérelmélet S mátrixát akkor tekintjük ismertnek, ha ismert egy részecske spektrum és a köztük lehetséges összes kétrészecske folyamat S mátrixelemeinek egy rendszere úgy, hogy a kétrészecske S mátrixok összes fizikai sávjában található szingularitását a megadott részecske spektrum segítségével meg tudjuk magyarázni vagy kötött állapotként, vagy pedig mint anomális küszöböt leíró (Coleman-Thun) diagram segítségével. A teljes spektrum meghatározását a szakzsargon a „bootstrap bezárása” néven ismeri. Az egzakt S mátrix program egy nagyon alapos, szinte minden részletre kiterjedő összefoglalása Mussardo cikkében olvasható [Mus92b]. Az alábbiakban a jelen dolgozatban érintett és ismertnek feltételezett egzakt S mátrixok felsorolására szorítkozom.

C.1.2. A skálázó Lee-Yang modell

A fejezet bevezetőjében említett skálázó Lee-Yang modell az $\mathcal{M}_{2,5}$ minimálmodell perturbációja a $\Phi_{1,2}$ primér térrel:

$$\mathcal{A}_{\text{SLY}} = \mathcal{A}_{2,5} + ig \int d^2x \Phi_{1,2}(x)$$

A g csatolási állandó normálását azzal rögzíthetjük, hogy a perturbáló tér konform kétpont függvényére előírjuk a

$$\langle \Phi_{1,2}(x) \Phi_{1,2}(0) \rangle = \frac{1}{|x|^{4\Delta_{1,2}}}$$

feltételt. A modell integrálható, spektruma egyetlen részecskét tartalmaz, amelynek m tömegével a g csatolási állandó a következő kapcsolatban áll:

$$g = (0.09704845636 \dots) m^{12/5}$$

az univerzális bulk energia konstans értéke

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \quad (\text{C.7})$$

(ld. [YZ90]) és a kétrészecske S mátrixa [CM89]

$$S(\theta) = \frac{\sinh \theta + i \sin \frac{2\pi}{3}}{\sinh \theta - i \sin \frac{2\pi}{3}}$$

Ez a modell a kétdimenziós kvantumtérelméletek „állatorvosi lova”: egyszerűsége miatt szinte minden az irodalomban kifejlesztett módszer (pl. a TC SA, a termodinamikai Bethe Ansatz vagy az ezen dolgozatban nem tárgyalt form-faktor módszer) ezen került kipróbálásra. A jelen dolgozatban is előfordul hasonló szerepkörben.

Az S mátrix pólusa a $\theta = \frac{2\pi}{3}i$ pontban annak felel meg, hogy a részecske előfordul mint önmaga két példányának kötött állapota (ez az ún. ϕ^3 tulajdonság, mivel szemléletesen ez az interpoláló tér hárompont csatolásának felel meg). Ennél a pólusnál a reziduum értéke:

$$\text{Res}_{\theta=\frac{2\pi}{3}i} S(\theta) = ig \quad , \quad g = -2\sqrt{3}$$

Az analitikus S mátrix elméletből következik, hogy unitér elméletben (diagonális szórás esetén) $g > 0$ kell legyen (értéke pontosan a tömeghéjon vett háromrészecske csatolás abszolút értékének négyzetével egyezik). A skálázó Lee-Yang modell azonban nem unitér, a Hilbert téren definiált metrika indefinit [CM89] (egészen pontosan az állapotok normája attól függően pozitív/negatív, hogy páros vagy páratlan számú részecskét tartalmaznak).

C.1.3. A kritikus Ising modell mágneses perturbációjának S mátrixa

A kritikus Ising modellt az $\mathcal{M}_{3,4}$ minimálmodell írja le, amelynek centrális töltése $c = 1/2$, és megfogalmazható egy zérus nyugalmi tömegű Majorana fermion térelméleteként. Az elméletben az egységoperátor mellett két nemtriviális primér tér van:

$$\begin{aligned} \epsilon & : \quad \Delta_\epsilon = \bar{\Delta}_\epsilon = \frac{1}{2} \\ \sigma & : \quad \Delta_\sigma = \bar{\Delta}_\sigma = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Ez egyben azt jelenti, hogy modellnek két releváns perturbációja van: az első a hőmérsékletnek (pontosabban a kritikus értéktől való eltérésének), a második a külső mágneses térnek felel meg; itt ez utóbbit tárgyaljuk (a hőmérsékleti perturbáció egy szabad tömeges Majorana fermionnak felel meg).

A hatás

$$\mathcal{A}(h) = \mathcal{A}_{c=\frac{1}{2}} - h \int dt dx \sigma(t, x)$$

Ez a modell integrálható, S mátrixát a nevezetes E_8 faktorizált szórás adja meg [Zam89]. A spektrum 8 részecskét tartalmaz $(A_i, i = 1, \dots, 8)$ amelyeknek tömegarányait az

$$\begin{aligned} m_2 &= 2m_1 \cos \frac{\pi}{5} \\ m_3 &= 2m_1 \cos \frac{\pi}{30} \\ m_4 &= 2m_2 \cos \frac{7\pi}{30} \\ m_5 &= 2m_2 \cos \frac{2\pi}{15} \\ m_6 &= 2m_2 \cos \frac{\pi}{30} \\ m_7 &= 2m_4 \cos \frac{\pi}{5} \\ m_8 &= 2m_5 \cos \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

összefüggések adják meg. A tömegskála és a csatolási állandó közötti reláció [Fat94] alapján

$$m_1 = (4.40490857 \dots) |h|^{8/15}$$

vagy másképp kifejezve

$$h = \kappa_h m_1^{8/15} \quad , \quad \kappa_h = 0.06203236 \dots \quad (\text{C.8})$$

Két A_1 típusú részecske közti szórásamplitúdó

$$S_{11}(\theta) = \left[\frac{1}{15} \right] \left[\frac{1}{3} \right] \left[\frac{2}{5} \right] \quad , \quad [x] = \frac{\sinh \theta + i \sin \pi x}{\sinh \theta - i \sin \pi x} \quad (\text{C.9})$$

ahonnan a többi kétrészecske S mátrix a „bootstrap” módszer segítségével meghatározható [Zam89], részletes felsorolásukat ld. Mussardonál [Mus92b].

C.1.4. A sine-Gordon elmélet S mátrixa

A sine-Gordon modell klasszikus hatása

$$\mathcal{A}_{\text{sG}} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{m^2}{\beta^2} \cos \beta \Phi \right\}$$

A modell spektrum egy szoliton-antiszoliton dublettből és ennek kötött állapotaiként előálló lélegzőkből áll. Klasszikusan a szolitonok tömege

$$M_{\text{szoliton}} = \frac{8m}{\beta^2}$$

a lélegzők spektruma pedig folytonos, tömegük 0 és $2M_{\text{szoliton}}$ között bármilyen értéket felvehet. A konfigurációk topologikus töltése

$$Q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \Phi dx = \frac{\beta}{2\pi} (\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty)) \quad (\text{C.10})$$

ami egy (a mozgásegyenlettől függetlenül) megmaradó mennyiség. A szoliton topologikus töltése +1, az antiszolitoné -1, a lélegzőké pedig 0.

A klasszikus elmélethez hasonlóan a kvantumelmélet is integrálható, és a szoliton dublett egzakt S mátrixa a következő [ZZ79] :

$$\begin{aligned} S_{++}^{++}(\theta) &= S_{--}^{--}(\theta) = - \prod_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(2(l-1)\lambda + \frac{\lambda\theta}{\pi})\Gamma(2l\lambda + 1 + \frac{\lambda\theta}{\pi})}{\Gamma((2l-1)\lambda + \frac{\lambda\theta}{\pi})\Gamma((2l-1)\lambda + 1 + \frac{\lambda\theta}{\pi})} / (\theta \rightarrow -\theta) \right] \quad (C.11) \\ S_{+-}^{+-}(\theta) &= S_{-+}^{-+}(\theta) = \frac{\sinh(\lambda\theta)}{\sinh(\lambda(i\pi - \theta))} S_{++}^{++}(\theta) \quad ; \quad \lambda = \frac{8\pi}{\beta^2} - 1 \\ S_{+-}^{-+}(\theta) &= S_{-+}^{+-}(\theta) = \frac{i \sinh(\lambda\pi)}{\sinh(\lambda(i\pi - \theta))} S_{++}^{++}(\theta) \end{aligned}$$

A lélegzők spektruma a kvantumelméletben diszkrét. Ha $\lambda < 1$, akkor egyetlen lélegző sincs jelen, ezt nevezzük a csatolási állandó taszító tartományának. A $\lambda > 1$ vonzó tartományban a következő tömegekkel rendelkeznek:

$$B_n : \quad m_n = 2 \sin \frac{n\pi}{2\lambda} \quad , \quad n = 1, 2, \dots < \lambda \quad (C.12)$$

A többi szórásamplitúdó felírásához célszerű bevezetni a

$$\{y\} = \frac{\left(\frac{y+1}{2\lambda}\right) \left(\frac{y-1}{2\lambda}\right)}{\left(\frac{y+1}{2\lambda} - 1\right) \left(\frac{y-1}{2\lambda} + 1\right)} \quad , \quad (x) = \frac{\sinh\left(\frac{\theta}{2} + i\frac{x\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\theta}{2} - i\frac{x\pi}{2}\right)} \quad (C.13)$$

függvényeket. A B^n és B^m lélegzők szórására

$$S^{n,m}(\theta) = \{n+m-1\}\{n+m-3\} \dots \{n-m+3\}\{n-m+1\} \quad (C.14)$$

adódik, ahol az általánosság megszorítása nélkül feltettük, hogy $n \geq m$, míg egy szoliton (vagy antiszoliton) és B^n szórásamplitúdója¹

$$S^n(\theta) = S_{+n}^{+n}(\theta) = S_{-n}^{-n}(\theta) = \{n-1+\lambda\}\{n-3+\lambda\} \dots \begin{cases} \{1+\lambda\} & , \text{ ha } n \text{ páros} \\ -\sqrt{\{\lambda\}} & , \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \quad (C.15)$$

C.1.5. Kink S mátrixok

A szokásos részecskék mellett a kétdimenziós kvantumtérelméletekben a lokalizált gerjesztéseknek létezik egy másik fontos osztálya is. Tegyük fel, hogy az elmélet több (véges sok), egymással degenerált vákuumot is megenged (pl. valamilyen diszkrét szimmetria spontán sérteése folytán). Ebben az esetben a konfigurációk között vannak olyanok, amelyek több doménre oszthatók, ahol egy domén belsejében a rendszer egy kiválasztott vákuum közelében van. A doméneket falak választják el, amelyek pontszerűen lokalizáltak és véges energiával rendelkeznek, Lorentz-transzformációk alatt pedig mozgó, lokalizált, részecskeszerű gerjesztésként viselkednek. Az ilyen doménfalakat *kinkek*nek nevezzük.

Egyszerűen látható, hogy a szokásos részecskékkal ellentétben az ilyen kinkekből álló sokrészecske állapotokban specifikus kiválasztási szabályok érvényesülnek abban a tekintetben, hogy milyen kinkek kerülhetnek egymás mellé. Jelölje K_{ab} azt a kinket, amely balról a , jobbról b vákuum között visz át. Amennyiben $a \neq b$, az adott kink két különböző vákuum között interpolál, ami egyenértékű azzal, hogy nemtriviális topológiai töltést hordoz. Egy általános elméletben a mező konfigurációk topológiai töltése a G/H faktoron veszi fel az értékét, ahol G az elmélet diszkrét szimmetriacsoportja, H pedig a vákuumok által sértetlenül hagyott alcsoport. A K_{ab} kink topológiai töltése a G azon elemei által alkotott osztály, amelyek az a vákuumot a b -be viszik át. A C.1.6 alatt látni fogjuk, hogy elképzelhetőek semleges kinkek is, amelyekre $a = b$.

¹ Vegyük észre, hogy $\{\lambda\}$ egy teljes négyzet.

Feltételezzük, hogy az összes kink tömege azonos, azaz egy multiplettet alkotnak (a több multipletre való általánosítás teljesen természetes módon megadható), valamint az egyszerűség kedvéért egy a, b párhoz csak egy kink tartozik. A kink mozoghat, ezért a szimmetria kvantumszámai mellett egy rapiditás paraméterrel is rendelkezik. Egy aszimptotikus sok-kink állapot (amiben a kinkok egymástól nagyon távol vannak)

$$|K_{a_1 a_2}(\theta_1) K_{a_2 a_3}(\theta_2) \dots K_{a_n a_{n+1}}(\theta_n)\rangle$$

alakú, ahol az A.2 alattiakhoz hasonlóan $\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n$ esetén bejövő (*in*), míg $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ esetén kimenő (*out*) állapotról van szó. Az $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ egy ún. vákuumszekvencia; minden modellre jellemzőek azok az ún. szomszédsági szabályok, amelyek megadják, hogy egy ilyen szekvenciában melyik két vákuum kerülhet egymás mellé (azaz melyik kettő között van interpoláló kink). Egészen pontosan egy olyan részecske multiplettet nevezünk kink multiplettnek, amelyikből a sokrészecske állapotok nem az egyrészecske állapotok szabad kompozíciójával képezhetők (mint a szokásos Fock térben), hanem a fenti módon nemtriviális szomszédsági szabályok szorítják meg a lehetséges állapotokat.

A doménfalak mozgás közben egymással találkozhatnak, és ekkor szóródnak egymáson. Integrálható modellekben ilyenkor semmi más nem történik, mint hogy a két fal áthatol egymáson és a köztük lévő vákuum típusa megváltozik, azaz a folyamat a

$$K_{ab}(\theta_1) + K_{bc}(\theta_2) \rightarrow K_{ad}(\theta_2) + K_{dc}(\theta_1)$$

egyenlettel adható meg. Ezen folyamat valószínűségi amplitúdóját

$$S_{ab}^{cd}(\theta_1 - \theta_2) = \begin{array}{ccc} & d & \\ a & \times & c \\ & b & \\ \theta_1 & & \theta_2 \end{array}$$

alakban reprezentálhatjuk. Az egzakt S mátrix-elmélet összes axiómája megfelelő módon átírható kink gerjesztések esetére [KM92]. A (C.1) helyett az S mátrix a

$$\sum_d S_{ab}^{cd}(\theta) S(-\theta)_{ad}^{ce} = \delta_b^e \quad (\text{C.16})$$

feltételnek kell eleget tegyen (C.16 ábra). Amennyiben a kétrészecske S mátrix ezenfelül teljesíti a

$$S_{ab}^{cd}(\theta)^* = S_{ad}^{cb}(-\theta^*) \quad (\text{C.17})$$

ún. hermitikus analiticitási feltételt akkor a szórás unitér, amit most

$$\sum_d S_{ab}^{cd}(\theta) S_{ae}^{cd}(\theta)^* = \delta_a^e \quad (\text{C.18})$$

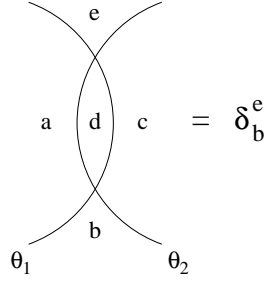
fejez ki.

A töltéskonjugálás a K_{ab} kinket a K_{ba} kinkbe viszi át, egy c_{ab} töltéskonjugációs faktor erejéig. A (C.4) keresztezési relációk megfelelője

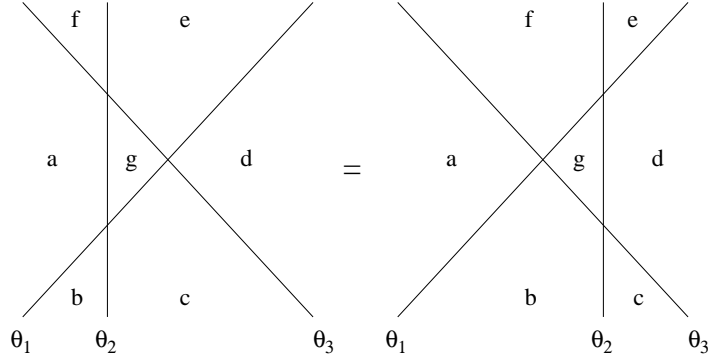
$$S_{ab}^{cd}(\theta) = \frac{c_{ad}}{c_{bc}} S_{da}^{bc}(i\pi - \theta) \quad (\text{C.19})$$

míg a (C.5) Yang-Baxter egyenlet helyett

$$\sum_g S_{fg}^{de}(\theta_1 - \theta_2) S_{ab}^{gf}(\theta_1 - \theta_3) S_{bc}^{dg}(\theta_2 - \theta_3) = \sum_g S_{ag}^{ef}(\theta_2 - \theta_3) S_{gc}^{de}(\theta_1 - \theta_3) S_{ab}^{cg}(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{C.20})$$



C.3. ábra. A (C.16) összefüggés grafikus reprezentációja



C.4. ábra. Kink faktorizációs egyenlet

jelenti a faktorizáció konzisztencia feltételét (C.4 ábra).

A dolgozatban előforduló, kink gerjesztéseket tartalmazó elméletek a minimálmodellek integrálható perturbáció ($\Phi_{1,3}$, $\Phi_{1,2}/\Phi_{2,1}$, illetve $\Phi_{1,5}$ operátorral), valamint a sine-Gordon modell $k > 1$ hajtogatási számmal jellemzett verziói. Ezek közül a következő alfejezetben példaként egy olyan S mátrixot mutatok be, amelynek meghatározása saját eredményem.

C.1.6. A Virasoro minimálmodellek $\Phi_{1,5}$ perturbációjának egzakt S mátrixa

Az $\mathcal{M}_{p,q}$ minimálmodell egyik lehetséges integrálható perturbációját a $\Phi_{1,5}$ operátor adja, ami azonban csak nemunitér elméletekben ($|p - q| \neq 1$) releváns. Ennek a modelleszádnak az S mátrixát a modell kvantumcsoport szimmetriáját felhasználva határoztam meg [Tak97a]; a cikkben szereplő elírásokat később egy Watts-szal közös cikkünkben helyesbítettem [TW02].

A modell hatása

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{p,q} - \lambda \int dt dx \Phi_{1,5}(t, x)$$

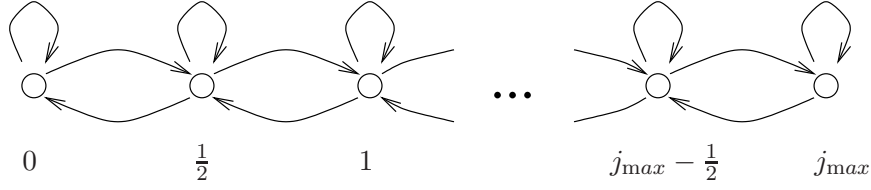
ahol $\mathcal{A}_{p,q}$ a konform térelmélet hatása. Az elmélet alapvető gerjesztéseit egy kink multipliett írja le, a megengedett vákuumok egy j (fél)egész számmal indexelhetők:

$$j = 0, 1/2, \dots, j_{max}$$

ahol $j_{max} = (p-2)/2$. A $\{j_1, \dots, j_n\}$ vákuumszekvenciák akkor megengedettek, ha eleget tesznek a

$$|j_{k+1} - j_k| = 0 \text{ vagy } \frac{1}{2}$$

szomszédsági szabályoknak, amelyeket a (C.5) ábrán illusztráltam. Ha a két vákuum azonos, a megfelelő kink semleges, ellenkező esetben pedig topológiai töltést hordoz.

C.5. ábra. Φ_{15} perturbációk vákuum szomszédsági gráfja

A

$$\begin{aligned}
 q &= \exp\left(\frac{i\pi p'}{4p}\right) \\
 y &= \exp\left(\frac{\pi}{\xi}\theta\right), \quad \xi = \frac{4}{3}\frac{\pi p}{p' - 2p} \\
 [z]_4 &= \frac{q^{4z} - q^{-4z}}{q^4 - q^{-4}}
 \end{aligned}$$

jelöléseket bevezetve, a töltött kinkek szórási amplitúdói a következő alakba írhatók:

$$\begin{aligned}
 S_{ab}^{cd} &= \left(-\left(\frac{y^2}{q} - \frac{q}{y^2} - \frac{1}{q} + q\right) \delta_{ac} \left(\frac{[2b+1]_4[2d+1]_4}{[2a+1]_4[2c+1]_4}\right)^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{y^2}{q^5} - \frac{q^5}{y^2} - \frac{1}{q} + q\right) \delta_{bd} \right) S_0(\theta)
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 S_0(\theta) &= \pm \frac{1}{4i} \left(\sinh \frac{\pi}{\xi} (\theta - \pi i) \sinh \frac{\pi}{\xi} \left(\theta - \frac{2\pi i}{3} \right) \right)^{-1} \times \\
 &\quad \exp \left(-2i \int_0^\infty \frac{\sin k\theta \sinh \frac{\pi k}{3} \cosh \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\xi}{2} \right) k}{k \cosh \frac{\pi k}{2} \sinh \frac{\xi k}{2}} dk \right).
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

A többi amplitúdó semleges kinkeket is tartalmaz:

$$\begin{aligned}
 S_{aa}^{aa} &= \frac{q^6 y^2 + y^2 q^8 - q^8 - q^4 y^2 + y^2 - q^{10} y^2 + y^4 q^2 - y^2 q^2}{y^2 q^5} S_0(\theta) \\
 S_{ab}^{ba} &= \frac{(y^2 + q^6)(y^2 - 1)}{y^2 q^3} S_0(\theta) \\
 S_{aa}^{ba} &= -\frac{(q^4 - 1)(y^2 + q^6)}{y q^5} S_0(\theta) \\
 S_{ab}^{aa} &= i \frac{c_{aa}}{c_{ba}} \frac{(q^4 - 1)(y^2 - 1)}{q^2 y} S_0(\theta) \\
 S_{aa}^{ab} &= i \frac{c_{ab}}{c_{aa}} \frac{(q^4 - 1)(y^2 - 1)}{q^2 y} S_0(\theta)
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

ahol a c_{ab} faktorok a K_{ab} kink töltéskonjugálásakor fellépő együtthatók, amelyek megjelennek a (C.19) keresztezési relációkban:

$$c_{ab} = \begin{cases} \alpha_1 (-1)^{2a} \sqrt{\frac{[2b+1]_4}{[2a+1]_4}} & a = b \pm \frac{1}{2} \\ \alpha_2 & a = b \end{cases}$$

amelyekben $\alpha_{1,2}$ tetszőleges (konvenciótól függő) szorzófaktorok.

A teljes spektrum elvileg az S mátrix szingularitásainak analízisével kapható meg, de a mai napig csak a (p, q) értékek egy bizonyos tartományában ismert, általánosságban a probléma nem megoldott. Azt azonban tudjuk, hogy a gerjesztett állapotok spektruma további, magasabb tömegű kink multipletteket, illetve skalár lélegzőket tartalmazhat. A magasabb kink multiplettek S mátrixai csak egy $y \rightarrow \eta y$ helyettesítéssel, illetve az $S_0(\theta)$ skalárfaktor értékében különböznek (C.21, C.23)-tól, ahol $\eta = \pm 1, \pm i$ lehet.

C.2. Reflexiós faktorok peremes integrálható modellekben

C.2.1. Az egzakt R mátrix elmélet alapjai

Tekintsünk egy kvantumtérelméletet a $\infty < x \leq 0$ félegyenesen, ahol $x = 0$ -ban a mezők valamilyen határfeltételnek tesznek eleget. Távol a peremtől a fizikai viselkedés lényegében azonos a perem nélküli elméletével. Az aszimptotikus állapotok a A.2 alatti jelölésekkel a következőképpen adhatók meg:

$$|A_{a_1}(p_1) \dots A_{a_n}(p_n)\rangle_{in}^\alpha = |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\alpha a_1 \dots a_n}, \quad \theta_1 > \dots > \theta_n > 0$$

A bemenő állapotban minden részecske rapiditása pozitív, hiszen a részecskék a végtelen távoli múltban mind a perem felé haladnak. A kimeneti állapotban hasonlóképpen:

$$|A_{a'_1}(p'_1) \dots A_{a'_m}(p'_m)\rangle_{out}^\beta = |\theta'_1, \dots, \theta'_m\rangle_{\beta a'_1 \dots a'_m}, \quad \theta'_1 < \dots < \theta'_m < 0$$

az összes részecske már visszaverődött a falról és a peremtől távolodik. Az α és α' indexek a perem állapotát adják meg; látni fogjuk, hogy a peremnek is lehetnek gerjesztései, illetve ezek tartozhatnak adott szimmetria alatt transzformálódó multiplettekbe is.

Amennyiben a perem nélküli elmélet integrálható, kereshetünk olyan határfeltételeket, hogy a magasabb spinű megmaradó mennyiségek egy része továbbra is megmaradjon. Nem minden mennyiségre lehetséges ez: pl. maga az impulzus megmaradása is sérül az eltolásinvariancia miatt, azonban Ghoshal és A. B. Zamolodchikov számos példát talált olyan határfeltételekre, amelyek a perem nélkül megmaradó mennyiségek felét megtartják. Ebben az esetben a peremfeltételt integrálhatónak nevezzük, és a C.1.1 alatti egzakt S mátrix elmélethez nagyon hasonló módon egy faktorizált szóráselmélet építhető fel, a következő tulajdonságokkal:

1. a részecskék száma egy folyamatban nem változhat, $m = n$
2. a bemenő és kimenő rapiditások halmaza előjeltől eltekintve megegyezik:

$$\{\theta_1, \dots, \theta_n\} = \{-\theta'_1, \dots, -\theta'_m\}$$

3. részecske típus váltó folyamatok csak akkor lehetségesek, ha vannak azonos tömegű, de különböző típusú részecskék, és ilyenkor egy adott részecske csak vele megegyező tömegűbe alakulhat át. A perem bemeneti és kimeneti állapotának energiája megegyezik: $E_\alpha = E_\beta$.
4. a sokrészecske folyamat amplitúdója kétrészecske szórások és a peremen történő egyrészecske reflexiók egymásutánjaként állítható elő, az átmeneti amplitúdókat tehát a (peremtől független) kétrészecske S mátrix amplitúdók és a (peremfeltételtől függő) egyrészecske reflexiós faktorok összessége teljesen meghatározza.

Az egyrészecske reflexiós faktort a

$$|\theta\rangle_{\alpha\alpha} = R_{\alpha\alpha}^{\alpha'\alpha'}(\theta)|-\theta\rangle_{\alpha'\alpha'}$$

összefüggés definiálja.

Az analitikus R mátrix elmélet axiómái a következők:

1. Az egyrészecske reflexiós faktor a komplex rapiditás paraméter meromorf függvényei a $0 \leq \Im m \theta \leq \pi/2$ sávban. Minden ebben a sávban az imaginárius tengely mentén található pólus fizikai eredetű, azaz vagy egy gerjesztett peremállapothoz, vagy egy úgynevezett peremes Coleman-Thun diagramhoz tartozik [DTW99, BBT04].
2. Az egyrészecske reflexiós faktorok eleget tesznek az

$$\sum_{\alpha', a'} R_{\alpha a}^{\alpha' a'}(\theta) R_{\alpha' a'}^{\alpha'' a''}(-\theta) = \delta_{\alpha}^{\alpha''} \delta_a^{a''} \quad (C.24)$$

feltételnek. Amennyiben ezenfelül teljesül a

$$\left(R_{\alpha a}^{\alpha' a'}(\theta) \right)^* = R_{\alpha' a'}^{\alpha a}(-\theta^*) \quad (C.25)$$

hermitikus analiticitási feltétel, akkor a reflexió unitér, azaz (valós θ -ra, azaz a fizikai tartományban)

$$\sum_{\alpha', a'} \left(R_{\alpha a}^{\alpha' a'}(\theta) \right)^* R_{\alpha' a'}^{\alpha'' a''}(\theta) = \delta_{\alpha}^{\alpha''} \delta_a^{a''} \quad (C.26)$$

3. Az egyrészecske reflexiós faktorok eleget tesznek a keresztezett unitaritásnak. Ennek felírásához érdemes bevezetni a

$$K^{\alpha\beta, ab}(\theta) = \sum_{\alpha', a'} \mathcal{C}^{aa'} \tilde{\mathcal{C}}^{\alpha\alpha'} R_{\alpha' a'}^{\beta b} \left(i\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

mennyiségeket, ahol \mathcal{C} a részecskék, $\tilde{\mathcal{C}}$ a perem állapotainak viselkedését írja le töltéskonjugálás alatt. A keresztezett unitaritás követelménye a következő:

$$K^{\alpha\beta, ab}(\theta) = \sum_{a' b'} S_{a' b'}^{ab}(2\theta) K^{\beta\alpha, b' a'}(-\theta) \quad (C.27)$$

4. Az egyrészecske reflexiós faktorok eleget tesznek a következő faktorizációs (peremes Yang-Baxter) egyenletnek

$$\begin{aligned} R_{\alpha_3 a_3}^{\alpha_4 a_4}(\theta_1) S_{a_2 b_3}^{a_3 b_4}(\theta_1 + \theta_2) R_{\alpha_1 b_2}^{\alpha_2 b_3}(\theta_2) S_{a_1 b_2}^{a_2 b_3}(\theta_1 - \theta_2) = \\ S_{a_3 b_3}^{a_4 b_4}(\theta_1 - \theta_2) R_{\alpha_2 b_2}^{\alpha_3 b_3}(\theta_2) S_{b_1 a_2}^{b_2 a_3}(\theta_2 + \theta_1) R_{\alpha_1 a_1}^{\alpha_2 a_2}(\theta_1) \end{aligned} \quad (C.28)$$

ahol az ismétlődő indexekre összegzést értünk.

5. A perem gerjesztett állapotai részei az elmélet spektrumának, az ilyen állapoton való reflexiós faktorok egy fúziós (bootstrap) reláció segítségével a kétrészecske S mátrixokkal és az alapállapotú reflexiós faktorról kifejezhetők, a részleteket ld. [GZ94].
6. Ha valamely részecske két másik kötött állapotaként áll elő, akkor reflexiós faktorai megkaphatók a konstituensek reflexiós faktorai és S mátrix amplitúdói ismeretében [Gho94].

A fentiek a C.1.5 alatt leírtakkal analóg módon általánosíthatók kink multiplettekre is, de ennek tárgyalásától itt most eltekintek, a peremes szuperszimmetrikus sine-Gordon modellről Bajnok Zoltánnal és Palla Lászlóval közösen írott munkánkban [BPT02b] a részletek megtalálhatók.

C.2.2. A peremes sine-Gordon elmélet reflexiós faktorai

Az alábbiakban a perem nélküli („bulk”) sine-Gordon elmélet jellemző mennyiségeire a C.1.4 alatt bevezetett jelöléseket használjuk. A legáltalánosabb olyan integrálható modell, amely a sine-Gordon modellből egy peremre lokalizált potenciál hozzáadásával kapható meg, Ghoshal és Zamolodchikov nyomán [GZ94] a következő klasszikus hatással definiálható:

$$\mathcal{A}_{\text{bsG}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \int_{-\infty}^0 dx \left(\frac{1}{2} \partial_{\mu} \Phi \partial^{\mu} \Phi + \frac{m_0^2}{\beta^2} \cos \beta \Phi \right) + M_0 \cos \frac{\beta}{2} (\Phi(t, x=0) - \Phi_0) \right\} \quad (C.29)$$

(a Dirichlet határfeltétel az $M_0 \rightarrow \infty$ határesetnek felel meg).

A peremes Yang-Baxter egyenletet, unitaritást és keresztezett unitaritást, valamint a minimális analitikus szerkezet követelményét kielégítő legáltalánosabb megoldást a szoliton dublett reflexiós faktorára szintén Ghoshal és Zamolodchikov határozta meg [GZ94]:

$$\begin{aligned} R(\eta, \vartheta, \theta) &= \begin{pmatrix} R_s^s(\eta, \vartheta, \theta) & R_s^{\bar{s}}(\eta, \vartheta, \theta) \\ R_s^{\bar{s}}(\eta, \vartheta, \theta) & R_s^s(\eta, \vartheta, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^+(\eta, \vartheta, \theta) & Q(\eta, \vartheta, \theta) \\ Q(\eta, \vartheta, \theta) & P^-(\eta, \vartheta, \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_0^+(\eta, \vartheta, \theta) & Q_0(\theta) \\ Q_0(\theta) & P_0^-(\eta, \vartheta, \theta) \end{pmatrix} R_0(\theta) \frac{\sigma(\eta, \theta)}{\cos(\eta)} \frac{\sigma(i\vartheta, \theta)}{\cosh(\vartheta)} \\ P_0^\pm(\eta, \vartheta, \theta) &= \cosh(\lambda\theta) \cos(\eta) \cosh(\vartheta) \pm i \sinh(\lambda\theta) \sin(\eta) \sinh(\vartheta) \\ Q(\theta) &= i \sinh(\lambda\theta) \cosh(\lambda\theta) \end{aligned} \quad (C.30)$$

ahol η és ϑ a megoldást jellemző két valós paraméter,

$$R_0(\theta) = \prod_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(4l\lambda + i\frac{2\lambda\theta}{\pi}) \Gamma(4\lambda(l-1) + 1 + i\frac{2\lambda\theta}{\pi})}{\Gamma((4l-3)\lambda + \frac{2\lambda\theta}{\pi}) \Gamma((4l-1)\lambda + 1 + \frac{2\lambda\theta}{\pi})} / (\theta \rightarrow -\theta) \right]$$

és

$$\sigma(x, \theta) = \frac{\cos x}{\cos(x - i\lambda\theta)} \prod_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} + (2l-1)\lambda + i\frac{\lambda\theta}{\pi}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi} + (2l-1)\lambda + i\frac{\lambda\theta}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi} + (2l-2)\lambda + i\frac{\lambda\theta}{\pi}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} + 2l\lambda + i\frac{\lambda\theta}{\pi})} / (\theta \rightarrow -\theta) \right]$$

A sine-Gordon modell peremes alapállapota (valamint minden később tárgyalandó gerjesztett peremállapot is) szinglett, ezért nincs hozzájuk rendelt multipllett index. A reflexióban a topologikus töltés kettővel változhat, vagyis a szoliton szám paritása megmarad.

A lélegzők reflexiós faktorai ennek ismeretében már egyértelműen meghatározhatók [Gho94]:

$$R^{(n)}(\eta, \vartheta, \theta) = R_0^{(n)}(\theta) \mathcal{S}^{(n)}(\eta, \theta) \mathcal{S}^{(n)}(i\vartheta, \theta) \quad (C.31)$$

ahol

$$R_0^{(n)}(\theta) = \frac{(\frac{1}{2}) (\frac{n}{2\lambda} + 1)}{(\frac{n}{2\lambda} + \frac{3}{2})} \prod_{l=1}^{n-1} \frac{(\frac{l}{2\lambda}) (\frac{l}{2\lambda} + 1)}{(\frac{l}{2\lambda} + \frac{3}{2})^2} \quad ; \quad \mathcal{S}^{(n)}(x, \theta) = \prod_{l=0}^{n-1} \frac{(\frac{x}{\lambda\pi} - \frac{1}{2} + \frac{n-2l-1}{2\lambda})}{(\frac{x}{\lambda\pi} + \frac{1}{2} + \frac{n-2l-1}{2\lambda})}$$

(a jelöléseket ld. (C.13)-ben).

A gerjesztett peremes állapotok spektrumát Bajnok Zoltánnal, Palla Lászlóval és Tóth Gábor Zsolttal együttműködésben határoztuk meg [BPTT02], Mattsson és Dorey Dirichlet peremfeltételekre vonatkozó eredményeit általánosítva [MD00]. A spektrum egész számok sorozataival paraméterezhető: az

$$|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle$$

állapot akkor létezik, ha teljesül a

$$\frac{\pi}{2} \geq \nu_{n_1} > w_{n_2} > \dots \geq 0$$

feltétel, ahol $\nu_n = \frac{\eta}{\lambda} - \frac{(2n+1)\pi}{2\lambda}$ és $w_n = \pi - \frac{\eta}{\lambda} - \frac{(2n-1)\pi}{2\lambda}$. Az ilyen állapot energiája (az alapállapotéhoz viszonyítva)

$$E_{|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle} = M \sum_{i \text{ páratlan}} \cos(\nu_{n_i}) + M \sum_{i \text{ páros}} \cos(w_{n_i})$$

Megjegyzem, hogy a peremes alapállapotot $| \rangle$ -vel jelöljük; a $|0\rangle$ már a ν_0 pólusnál keltett (első) gerjesztett állapotot jelöli.

A reflexiós faktorok k paritásától függenek. Ha k páros, akkor a szoliton dublett amplitúdói

$$Q_{|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle}(\eta, \vartheta, \theta) = Q(\eta, \vartheta, \theta) \prod_{i \text{ odd}} a_{n_i}(\eta, \theta) \prod_{i \text{ even}} a_{n_i}(\bar{\eta}, \theta)$$

és

$$P_{|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle}^{\pm}(\eta, \vartheta, \theta) = P^{\pm}(\eta, \vartheta, \theta) \prod_{i \text{ odd}} a_{n_i}(\eta, \theta) \prod_{i \text{ even}} a_{n_i}(\bar{\eta}, \theta)$$

ahol

$$a_n(\eta, \theta) = \prod_{l=1}^n \left\{ 2 \left(\frac{\eta}{\pi} - l \right) \right\} \quad ; \quad \bar{\eta} = \pi(\lambda + 1) - \eta$$

(ismételten (C.13) jelöléseit alkalmazva).

A lélegzők reflexiós faktoraira

$$R_{|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle}^{(n)}(\eta, \vartheta, \theta) = R^{(n)}(\eta, \vartheta, \theta) \prod_{i \text{ odd}} b_{n_i}^n(\eta, \theta) \prod_{i \text{ even}} b_{n_i}^n(\bar{\eta}, \theta)$$

adódik, ahol

$$b_k^n(\eta, \theta) = \prod_{l=1}^{\min(n, k)} \left\{ \frac{2\eta}{\pi} - \lambda + n - 2l \right\} \left\{ \frac{2\eta}{\pi} + \lambda - n - 2(k + 1 - l) \right\}$$

Páratlan k -ra a fenti formulákban fel kell cserélni a szolitont és az antiszolitont ($s \leftrightarrow \bar{s}$), valamint az

$$\eta \rightarrow \pi(\lambda + 1) - \eta$$

helyettesítést kell elvégezni.

Az R mátrix paramétereit a kvantumtérelmélet csatolásainak függvényében Al. B. Zamolodchikov határozta meg [Zam99]. A csatolási állandókat a perturbált konform térelméleti leírásban definiáljuk, azaz a (C.29)-nak megfelelő peremes kvantumtérelméletet egy Neumann határfeltételeknek eleget tevő $c = 1$ szabad bozon kettős („bulk” és peremes) perturbációjaként adjuk meg:

$$\mathcal{A}_{\text{sG}}^{\text{pCFT}} = \mathcal{A}_{c=1}^N + \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^0 dx (V_{(2,0)} + V_{(-2,0)}) + \frac{\tilde{\mu}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(e^{-\beta\Phi_0/2} \Psi_1 + e^{\beta\Phi_0/2} \Psi_{-1} \right) \right\} \quad (\text{C.32})$$

ahol a $V_{(\pm 2,0)}$ és $\Psi_{\pm 1}$ vertex operátorokat a (B.30) és (B.31) kifejezések alapján definiáljuk, és a bozon kompaktifikációs sugara²

$$r = 2 \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta}$$

Az R mátrix paramétereit és a (C.32) hatás csatolási állandói közötti összefüggés:

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\eta}{\lambda + 1} \right) \cosh \left(\frac{\vartheta}{\lambda + 1} \right) &= \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_{\text{crit}}} \cos \left(\frac{\beta\Phi_0}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\eta}{\lambda + 1} \right) \sinh \left(\frac{\vartheta}{\lambda + 1} \right) &= \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_{\text{crit}}} \sin \left(\frac{\beta\Phi_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

ahol

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2\mu}{\sin \left(\frac{\pi\lambda}{\lambda+1} \right)}}$$

² A 4.2.2 alatt tárgyaltakhoz hasonlóan természetesen itt is lehet hajtogatott modelleket definiálni, ahol $r = 2k \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta}$ és a perturbáló operátorok $V_{(2k,0)} + V_{(-2k,0)}$, illetve $e^{-\beta\Phi_0/2} \Psi_k + e^{\beta\Phi_0/2} \Psi_{-k}$.

Zamolodchikov a perem energiáját is meghatározta:

$$E_b(\eta, \vartheta) = -\frac{M}{2 \cos \frac{\pi}{2\lambda}} \left(\cos \left(\frac{\eta}{\lambda} \right) + \cosh \left(\frac{\vartheta}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.34})$$

Ezen relációk levezetése [BPT02a]-ban található.

A $\Phi(x, t) = \Phi_0$ Dirichlet peremfeltétel esetén a hatás alakja

$$\mathcal{A}_{\text{sG}}^{\text{pCFT}} = \mathcal{A}_{c=1}^D + \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^0 dx (V_{(1,0)} + V_{(-1,0)}) \quad (\text{C.35})$$

ahol a $V_{(\pm 1,0)}$ vertex operátorok a (B.35) alapján definiáltak és a kompaktifikációs sugár az

$$r = \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta}$$

kapcsolatban áll a β paraméterrel. A reflexiós faktorokban a Dirichlet határfeltétel a $\vartheta \rightarrow \infty$ határesetnek felel meg, és a fennmaradó paraméter az

$$\eta = (\lambda + 1) \frac{\beta \Phi_0}{2} \quad (\text{C.36})$$

kapcsolatban áll a mezőnek a peremen felvett értékével [GZ94], a peremes energijárulék pedig [LMSS95]

$$E_b(\eta) = -\frac{M}{2 \cos \frac{\pi}{2\lambda}} \left(\cos \left(\frac{\eta}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.37})$$

Irodalomjegyzék

- [ABN⁺05] C. Ahn, Z. Bajnok, R. I. Nepomechie, L. Palla and G. Takacs, *NLIE for hole excited states in the sine-Gordon model with two boundaries*, Nucl. Phys. **B714**, 307–335 (2005), hep-th/0501047.
- [ABR04] C. Ahn, M. Bellacosa and F. Ravanini, *Excited states NLIE for sine-Gordon model in a strip with Dirichlet boundary conditions*, Phys. Lett. **B595**, 537–546 (2004), hep-th/0312176.
- [ADHR94] F. C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel and V. Rittenberg, *Reaction - diffusion processes, critical dynamics and quantum chains*, Ann. Phys. **230**, 250–302 (1994), hep-th/9302112.
- [AKT06] B. L. Altshuler, R. M. Konik and A. M. Tsvelik, *Finite temperature correlation functions in integrable models: Derivation of the large distance and time asymptotics from the form factor expansion*, Nucl. Phys. **B739**, 311–327 (2006), cond-mat/0508618.
- [AL91] I. Affleck and A. W. W. Ludwig, *Universal noninteger 'ground state degeneracy' in critical quantum systems*, Phys. Rev. Lett. **67**, 161–164 (1991).
- [AN00] C. Ahn and R. I. Nepomechie, *Exact solution of the supersymmetric sinh-Gordon model with boundary*, Nucl. Phys. **B586**, 611–640 (2000), hep-th/0005170.
- [AN04] C. Ahn and R. I. Nepomechie, *Finite size effects in the XXZ and sine-Gordon models with two boundaries*, Nucl. Phys. **B676**, 637–658 (2004), hep-th/0309261.
- [ANS06] C. Ahn, R. I. Nepomechie and J. Suzuki, *Finite size effects in the spin-1 XXZ and supersymmetric sine-Gordon models with Dirichlet boundary conditions*, (2006), hep-th/0611136.
- [B⁺01] J. Balog et al., *Does the XY model have an integrable continuum limit?*, Nucl. Phys. **B618**, 315–370 (2001), hep-lat/0106015.
- [Bal01] J. Balog, *Kosterlitz-Thouless theory and lattice artifacts*, J. Phys. **A34**, 5237–5250 (2001), hep-lat/0011078.
- [BBT02] Z. Bajnok, G. Böhm and G. Takacs, *Boundary reduction formula*, J. Phys. **A35**, 9333–9342 (2002), hep-th/0207079.
- [BBT04] Z. Bajnok, G. Böhm and G. Takacs, *On perturbative quantum field theory with boundary*, Nucl. Phys. **B682**, 585–617 (2004), hep-th/0309119.
- [BCDS89] H. W. Braden, E. Corrigan, P. E. Dorey and R. Sasaki, *Extended Toda field theory and exact S matrices*, Phys. Lett. **B227**, 411 (1989).
- [BCDS90] H. W. Braden, E. Corrigan, P. E. Dorey and R. Sasaki, *Affine Toda field theory and exact S matrices*, Nucl. Phys. **B338**, 689–746 (1990).
- [BCG] R. K. Bullough, P. J. Caudrey and H. M. Gibbs, *The double sine-Gordon equations: a physically applicable system of equations*, In *Bullough, R.K., Caudrey, P.J.: Solitons*, 107–141.
- [BCKT01] M. J. Bhaseen, J. S. Caux, I. I. Kogan and A. M. Tsvelik, *Disordered Dirac Fermions: the Marriage of Three Different Approaches*, Nucl. Phys. **B618**, 465–499 (2001), cond-mat/0012240.
- [BDP⁺04] Z. Bajnok, C. Dunning, L. Palla, G. Takacs and F. Wagner, *SUSY sine-Gordon theory as a perturbed conformal field theory and finite size effects*, Nucl. Phys. **B679**, 521–544 (2004), hep-th/0309120.
- [BG06] Z. Bajnok and A. George, *From defects to boundaries*, Int. J. Mod. Phys. **A21**, 1063–1078 (2006), hep-th/0404199.
- [BH01] J. Balog and A. Hegedus, *Virial expansion and TBA in $O(N)$ sigma models*, Phys. Lett. **B523**, 211–220 (2001), hep-th/0108071.
- [BH04a] J. Balog and A. Hegedus, *TBA equations for excited states in the $O(3)$ and $O(4)$ nonlinear sigma-model*, J. Phys. **A37**, 1881–1901 (2004), hep-th/0309009.
- [BH04b] J. Balog and A. Hegedus, *TBA equations for excited states in the sine-Gordon model*, J. Phys. **A37**, 1903–1925 (2004), hep-th/0304260.

- [BH05] J. Balog and A. Hegedus, *TBA equations for the mass gap in the $O(2r)$ non-linear sigma-models*, Nucl. Phys. **B725**, 531–553 (2005), hep-th/0504186.
- [BJ97] E. J. Beggs and P. R. Johnson, *Inverse scattering and solitons in A_{n-1} affine Toda field theories*, Nucl. Phys. **B484**, 653–681 (1997), hep-th/9610104.
- [BJ98] E. J. Beggs and P. R. Johnson, *Inverse scattering and solitons in A_{n-1} affine Toda field theories. II*, Nucl. Phys. **B529**, 567–587 (1998), hep-th/9803248.
- [BKKW03] J. Balog, F. Knechtli, T. Korzec and U. Wolff, *Numerical confirmation of analytic predictions for the finite volume mass gap of the XY-model*, Nucl. Phys. **B675**, 555–566 (2003), hep-lat/0309028.
- [BKKW04] J. Balog, F. Knechtli, T. Korzec and U. Wolff, *Comparison of analytic and numerical results in the XY-model*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **129**, 777–779 (2004), hep-lat/0309052.
- [BL90] D. Bernard and A. Leclair, *Residual quantum symmetries of the restricted sine-Gordon theories*, Nucl. Phys. **B340**, 721–751 (1990).
- [BL91] D. Bernard and A. Leclair, *Quantum group symmetries and nonlocal currents in 2-D QFT*, Commun. Math. Phys. **142**, 99–138 (1991).
- [BLZ97] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, *Quantum field theories in finite volume: Excited state energies*, Nucl. Phys. **B489**, 487–531 (1997), hep-th/9607099.
- [BMM01] M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, *New developments in the Casimir effect*, Phys. Rept. **353**, 1–205 (2001), quant-ph/0106045.
- [BPT01] Z. Bajnok, L. Palla and G. Takacs, *Boundary states and finite size effects in sine-Gordon model with Neumann boundary condition*, Nucl. Phys. **B614**, 405–448 (2001), hep-th/0106069.
- [BPT02a] Z. Bajnok, L. Palla and G. Takacs, *Finite size effects in boundary sine-Gordon theory*, Nucl. Phys. **B622**, 565–592 (2002), hep-th/0108157.
- [BPT02b] Z. Bajnok, L. Palla and G. Takacs, *Spectrum of boundary states in $N = 1$ SUSY sine-Gordon theory*, Nucl. Phys. **B644**, 509–532 (2002), hep-th/0207099.
- [BPT05a] Z. Bajnok, L. Palla and G. Takacs, *Finite size effects in quantum field theories with boundary from scattering data*, Nucl. Phys. **B716**, 519–542 (2005), hep-th/0412192.
- [BPT05b] Z. Bajnok, L. Palla and G. Takacs, *(Semi)classical analysis of sine-Gordon model on a strip*, Fortsch. Phys. **53**, 548–553 (2005).
- [BPT06a] Z. Bajnok, L. Palla and G. Takacs, *Boundary one-point function, Casimir energy and boundary state formalism in $D+1$ dimensional QFT*, (2006), hep-th/0611176.
- [BPT06b] Z. Bajnok, L. Palla and G. Takacs, *Casimir force between planes as a boundary finite size effect*, Phys. Rev. **D73**, 065001 (2006), hep-th/0506089.
- [BPT06c] Z. Bajnok, L. Palla and G. Takacs, *On the boundary form factor program*, Nucl. Phys. **B750**, 179–212 (2006), hep-th/0603171.
- [BPTT02] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs and G. Z. Toth, *The spectrum of boundary states in sine-Gordon model with integrable boundary conditions*, Nucl. Phys. **B622**, 548–564 (2002), hep-th/0106070.
- [BPTW00] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs and F. Wagner, *The k -folded sine-Gordon model in finite volume*, Nucl. Phys. **B587**, 585–618 (2000), hep-th/0004181.
- [BPTW01] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs and F. Wagner, *Nonperturbative study of the two frequency sine-Gordon model*, Nucl. Phys. **B601**, 503–538 (2001), hep-th/0008066.
- [BPWT] Z. Bajnok, L. Palla, F. Wagner and G. Takacs, *Nonperturbative analysis of the two-frequency sine-Gordon model*, Prepared for 24th Johns Hopkins Workshop on Non-perturbative QFT Methods and Their Applications, Budapest, Hungary, 19–21 Aug 2000.
- [BPZ84] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241**, 333–380 (1984).
- [Car88] J. L. Cardy, *The central charge and universal combinations of amplitudes in two-dimensional theories away from criticality*, Phys. Rev. Lett. **60**, 2709 (1988).
- [CDD56] L. Castillejo, R. H. Dalitz and F. J. Dyson, *Low’s scattering equation for the charged and neutral scalar theories*, Phys. Rev. **101**, 453–458 (1956).
- [CDS93] E. Corrigan, P. E. Dorey and R. Sasaki, *On a generalized bootstrap principle*, Nucl. Phys. **B408**, 579–599 (1993), hep-th/9304065.
- [CFL91] A. Cappelli, D. Friedan and J. I. Latorre, *C theorem and spectral representation*, Nucl. Phys. **B352**, 616–670 (1991).
- [CM89] J. L. Cardy and G. Mussardo, *S matrix of the Yang-Lee edge singularity in two-dimensions*, Phys. Lett. **B225**, 275 (1989).

- [Col75] S. R. Coleman, *Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model*, Phys. Rev. **D11**, 2088 (1975).
- [Cor94] E. Corrigan, *Recent developments in affine Toda quantum field theory*, (1994), hep-th/9412213.
- [CP88] J. L. Cardy and I. Peschel, *Finite size dependence of the free energy in two-dimensional critical systems*, Nucl. Phys. **B300**, 377 (1988).
- [CT78] S. R. Coleman and H. J. Thun, *On the prosaic origin of the double poles in the sine-Gordon S matrix*, Commun. Math. Phys. **61**, 31 (1978).
- [dAC04] L. C. de Albuquerque and R. M. Cavalcanti, *Casimir effect for the scalar field under Robin boundary conditions: A functional integral approach*, J. Phys. **A37**, 7039–7050 (2004), hep-th/0311052.
- [DDT00] P. Dorey, C. Dunning and R. Tateo, *New families of flows between two-dimensional conformal field theories*, Nucl. Phys. **B578**, 699–727 (2000), hep-th/0001185.
- [DDT04] P. Dorey, C. Dunning and R. Tateo, *Aspects of the ODE / IM correspondence*, (2004), hep-th/0411069.
- [DdV87] C. Destri and H. J. de Vega, *Light cone lattice approach to fermionic theories in 2-D: the massive Thirring model*, Nucl. Phys. **B290**, 363 (1987).
- [DdV92] C. Destri and H. J. de Vega, *New thermodynamic Bethe ansatz equations without strings*, Phys. Rev. Lett. **69**, 2313–2317 (1992).
- [DdV95] C. Destri and H. J. de Vega, *Unified approach to thermodynamic Bethe Ansatz and finite size corrections for lattice models and field theories*, Nucl. Phys. **B438**, 413–454 (1995), hep-th/9407117.
- [DdV97] C. Destri and H. J. de Vega, *Non-linear integral equation and excited-states scaling functions in the sine-Gordon model*, Nucl. Phys. **B504**, 621–664 (1997), hep-th/9701107.
- [Del01] G. Delfino, *One-point functions in integrable quantum field theory at finite temperature*, J. Phys. **A34**, L161–L168 (2001), hep-th/0101180.
- [DF84] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models*, Nucl. Phys. **B240**, 312 (1984).
- [DF85] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Four point correlation functions and the operator algebra in the two-dimensional conformal invariant theories with the central charge $c < 1$* , Nucl. Phys. **B251**, 691 (1985).
- [DFRT04] P. Dorey, D. Fioravanti, C. Rim and R. Tateo, *Integrable quantum field theory with boundaries: The exact g-function*, Nucl. Phys. **B696**, 445–467 (2004), hep-th/0404014.
- [DG95] G. W. Delius and M. T. Grisaru, *Toda soliton mass corrections and the particle - soliton duality conjecture*, Nucl. Phys. **B441**, 259–276 (1995), hep-th/9411176.
- [DGM06] G. Delfino, P. Grinza and G. Mussardo, *Decay of particles above threshold in the Ising field theory with magnetic field*, Nucl. Phys. **B737**, 291–303 (2006), hep-th/0507133.
- [DHN74] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, *Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory. 1. Semiclassical functional methods*, Phys. Rev. **D10**, 4114 (1974).
- [DHN75a] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, *The particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques*, Phys. Rev. **D11**, 3424 (1975).
- [DHN75b] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, *Semiclassical bound states in an asymptotically free theory*, Phys. Rev. **D12**, 2443 (1975).
- [DLP61] I. D. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, Usp. Fiz. Nauk **73**, 381 (1961), [Soviet Phys. Usp. **4**, 153 (1961)].
- [DM98] G. Delfino and G. Mussardo, *Non-integrable aspects of the multi-frequency sine-Gordon model*, Nucl. Phys. **B516**, 675–703 (1998), hep-th/9709028.
- [DMS94] G. Delfino, G. Mussardo and P. Simonetti, *Statistical models with a line of defect*, Phys. Lett. **B328**, 123–129 (1994), hep-th/9403049.
- [DMS96] G. Delfino, G. Mussardo and P. Simonetti, *Non-integrable Quantum Field Theories as Perturbations of Certain Integrable Models*, Nucl. Phys. **B473**, 469–508 (1996), hep-th/9603011.
- [Doy05] B. Doyon, *Finite-temperature form factors in the free Majorana theory*, J. Stat. Mech. **0511**, P006 (2005), hep-th/0506105.
- [Doy06] B. Doyon, *Finite-temperature form factors: A review*, (2006), hep-th/0611066.
- [DPTW98] P. Dorey, A. Pocklington, R. Tateo and G. Watts, *TBA and TCSA with boundaries and excited states*, Nucl. Phys. **B525**, 641–663 (1998), hep-th/9712197.

- [DPTW01] P. Dorey, M. Pillin, R. Tateo and G. M. T. Watts, *One-point functions in perturbed boundary conformal field theories*, Nucl. Phys. **B594**, 625–659 (2001), hep-th/0007077.
- [DS96] G. Delfino and P. Simonetti, *Correlation functions in the two-dimensional Ising model in a magnetic field at $T = T_c$* , Phys. Lett. **B383**, 450–456 (1996), hep-th/9605065.
- [DT96] P. Dorey and R. Tateo, *Excited states by analytic continuation of TBA equations*, Nucl. Phys. **B482**, 639–659 (1996), hep-th/9607167.
- [DT98] P. Dorey and R. Tateo, *Excited states in some simple perturbed conformal field theories*, Nucl. Phys. **B515**, 575–623 (1998), hep-th/9706140.
- [DT99] P. Dorey and R. Tateo, *Anharmonic oscillators, the thermodynamic Bethe ansatz, and nonlinear integral equations*, J. Phys. **A32**, L419–L425 (1999), hep-th/9812211.
- [DT00] P. Dorey and R. Tateo, *Differential equations and integrable models: The $SU(3)$ case*, Nucl. Phys. **B571**, 583–606 (2000), hep-th/9910102.
- [DTW99] P. Dorey, R. Tateo and G. Watts, *Generalisations of the Coleman-Thun mechanism and boundary reflection factors*, Phys. Lett. **B448**, 249–256 (1999), hep-th/9810098.
- [Dun03] C. Dunning, *Finite size effects and the supersymmetric sine-Gordon models*, J. Phys. **A36**, 5463–5476 (2003), hep-th/0210225.
- [dVF91] H. J. de Vega and V. A. Fateev, *Factorizable S matrices for perturbed W invariant theories*, Int. J. Mod. Phys. **A6**, 3221–3234 (1991).
- [dVG89] H. J. de Vega and H. J. Giacomini, *Intertwining vectors and the connection between critical vertex and SOS models*, J. Phys. **A22**, 2759–2779 (1989).
- [Eft93] C. J. Efthimiou, *Quantum group symmetry for the Φ_{12} perturbed and Φ_{21} perturbed minimal models of conformal field theory*, Nucl. Phys. **B398**, 697–740 (1993).
- [Fat94] V. A. Fateev, *The exact relations between the coupling constants and the masses of particles for the integrable perturbed conformal field theories*, Phys. Lett. **B324**, 45–51 (1994).
- [Fel89] G. Felder, *BRST approach to minimal methods*, Nucl. Phys. **B317**, 215 (1989).
- [Fen01] P. Fendley, *Integrable sigma models and perturbed coset models*, JHEP **05**, 050 (2001), hep-th/0101034.
- [FFGR06] G. Feverati, D. Fioravanti, P. Grinza and M. Rossi, *On the finite size corrections of anti-ferromagnetic anomalous dimensions in $N = 4$ SYM*, JHEP **05**, 068 (2006), hep-th/0602189.
- [FGN00] M. Fabrizio, A. O. Gogolin and A. A. Nersesian, *Critical properties of the double-frequency sine-Gordon model with applications*, Nucl. Phys. **B580**, 647–687 (2000), cond-mat/0001227.
- [FGP+06] G. Feverati, K. Graham, P. A. Pearce, G. Z. Toth and G. Watts, *A renormalisation group for TCSA*, (2006), hep-th/0612203.
- [FJKO94] A. Fring, P. R. Johnson, M. A. C. Kneipp and D. I. Olive, *Vertex operators and soliton time delays in affine Toda field theory*, Nucl. Phys. **B430**, 597–614 (1994), hep-th/9405034.
- [FK78] L. D. Faddeev and V. E. Korepin, *Quantum theory of solitons: preliminary version*, Phys. Rept. **42**, 1–87 (1978).
- [FK04] D. Friedan and A. Konechny, *On the boundary entropy of one-dimensional quantum systems at low temperature*, Phys. Rev. Lett. **93**, 030402 (2004), hep-th/0312197.
- [FL92] G. Felder and A. Leclair, *Restricted quantum affine symmetry of perturbed minimal conformal models*, Int. J. Mod. Phys. **A7S1A**, 239–278 (1992), hep-th/9109019.
- [FLV91] D. Z. Freedman, J. I. Latorre and X. Vilasis, *Illustrating the spectral form of the C theorem*, Mod. Phys. Lett. **A6**, 531–542 (1991).
- [FLZZ97] V. Fateev, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, *Expectation values of boundary fields in the boundary sine-Gordon model*, Phys. Lett. **B406**, 83–88 (1997), hep-th/9702190.
- [FLZZ98] V. Fateev, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, *Expectation values of local fields in Bullough-Dodd model and integrable perturbed conformal field theories*, Nucl. Phys. **B516**, 652–674 (1998), hep-th/9709034.
- [FMQR97] D. Fioravanti, A. Mariottini, E. Quattrini and F. Ravanini, *Excited state Destri-de Vega equation for sine-Gordon and restricted sine-Gordon models*, Phys. Lett. **B390**, 243–251 (1997), hep-th/9608091.
- [FPGHM97] C. R. Fernandez-Pousa, M. V. Gallas, T. J. Hollowood and J. L. Miramontes, *The symmetric space and homogeneous sine-Gordon theories*, Nucl. Phys. **B484**, 609–630 (1997), hep-th/9606032.

- [Fre95] M. Freeman, *Conserved charges and soliton solutions in affine Toda theory*, Nucl. Phys. **B433**, 657–670 (1995), hep-th/9408092.
- [FRT98a] G. Feverati, F. Ravanini and G. Takacs, *Scaling functions in the odd charge sector of sine-Gordon/massive Thirring theory*, Phys. Lett. **B444**, 442–450 (1998), hep-th/9807160.
- [FRT98b] G. Feverati, F. Ravanini and G. Takacs, *Truncated conformal space at $c = 1$, nonlinear integral equation and quantization rules for multi-soliton states*, Phys. Lett. **B430**, 264–273 (1998), hep-th/9803104.
- [FRT99] G. Feverati, F. Ravanini and G. Takacs, *Nonlinear integral equation and finite volume spectrum of sine-Gordon theory*, Nucl. Phys. **B540**, 543–586 (1999), hep-th/9805117.
- [FRT00] G. Feverati, F. Ravanini and G. Takacs, *Nonlinear integral equation and finite volume spectrum of minimal models perturbed by $\Phi_{1,3}$* , Nucl. Phys. **B570**, 615–643 (2000), hep-th/9909031.
- [FS94] P. Fendley and H. Saleur, *Deriving boundary S matrices*, Nucl. Phys. **B428**, 681–693 (1994), hep-th/9402045.
- [Gan95] G. M. Gandenberger, *Exact S matrices for bound states of $a_2^{(1)}$ affine Toda solitons*, Nucl. Phys. **B449**, 375–405 (1995), hep-th/9501136.
- [Gho94] S. Ghoshal, *Bound state boundary S matrix of the Sine-Gordon model*, Int. J. Mod. Phys. **A9**, 4801–4810 (1994), hep-th/9310188.
- [GJ75] J. Goldstone and R. Jackiw, *Quantization of nonlinear waves*, Phys. Rev. **D11**, 1486–1498 (1975).
- [GM95] G. M. Gandenberger and N. J. MacKay, *Exact S matrices for $d_{N+1}^{(2)}$ affine Toda solitons and their bound states*, Nucl. Phys. **B457**, 240–272 (1995), hep-th/9506169.
- [GM97a] G. M. Gandenberger and N. J. MacKay, *Remarks on excited states of affine Toda solitons*, Phys. Lett. **B390**, 185–188 (1997), hep-th/9608055.
- [GM97b] R. Guida and N. Magnoli, *Vacuum expectation values from a variational approach*, Phys. Lett. **B411**, 127–133 (1997), hep-th/9706017.
- [GMW96] G. M. Gandenberger, N. J. MacKay and G. M. T. Watts, *Twisted algebra R -matrices and S -matrices for $b_n^{(1)}$ affine Toda solitons and their bound states*, Nucl. Phys. **B465**, 329–349 (1996), hep-th/9509007.
- [GZ94] S. Ghoshal and A. B. Zamolodchikov, *Boundary S matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory*, Int. J. Mod. Phys. **A9**, 3841–3886 (1994), hep-th/9306002.
- [Heg04] A. Hegedus, *Finite size effects in the SS -model: Two component nonlinear integral equations*, Nucl. Phys. **B679**, 545–567 (2004), hep-th/0310051.
- [Heg05] A. Hegedus, *Nonlinear integral equations for finite volume excited state energies of the $O(3)$ and $O(4)$ nonlinear sigma-models*, J. Phys. **A38**, 5345–5358 (2005), hep-th/0412125.
- [HHN⁺02] M. Hasenbusch, P. Hasenfratz, F. Niedermayer, B. Seefeld and U. Wolff, *Nonstandard cutoff effects in the nonlinear sigma model*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106**, 911–913 (2002), hep-lat/0110202.
- [HIM95] U. Harder, A. A. Iskandar and W. A. McGhee, *On the breathers of $a_n^{(1)}$ affine Toda field theory*, Int. J. Mod. Phys. **A10**, 1879–1904 (1995), hep-th/9409035.
- [HN01] P. Hasenfratz and F. Niedermayer, *Unexpected results in asymptotically free quantum field theories*, Nucl. Phys. **B596**, 481–494 (2001), hep-lat/0006021.
- [Hol92] T. J. Hollowood, *Solitons in affine Toda field theories*, Nucl. Phys. **B384**, 523–540 (1992).
- [Hol93a] T. J. Hollowood, *Quantizing $SL(N)$ solitons and the Hecke algebra*, Int. J. Mod. Phys. **A8**, 947–982 (1993), hep-th/9203076.
- [Hol93b] T. J. Hollowood, *Quantum soliton mass corrections in $SL(N)$ affine Toda field theory*, Phys. Lett. **B300**, 73–83 (1993), hep-th/9209024.
- [HRS07] A. Hegedus, F. Ravanini and J. Suzuki, *Exact finite size spectrum in super sine-Gordon model*, Nucl. Phys. **B763**, 330–353 (2007), hep-th/0610012.
- [Joh75] K. Johnson, *The M.I.T. bag model*, Acta Phys. Polon. **B6**, 865 (1975).
- [Kac] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1990) 400 p.
- [KBP91] A. Klumper, M. Batchelor and P. Pearce, *Central charges of the 6- and 19-vertex models with twisted boundary conditions*, J. Phys. **A24**, 3111 (1991).
- [KM90] T. R. Klassen and E. Melzer, *Purely elastic scattering theories and their ultraviolet limits*, Nucl. Phys. **B338**, 485–528 (1990).
- [KM91] T. R. Klassen and E. Melzer, *On the relation between scattering amplitudes and finite size mass corrections in QFT*, Nucl. Phys. **B362**, 329–388 (1991).

- [KM92] T. R. Klassen and E. Melzer, *Kinks in finite volume*, Nucl. Phys. **B382**, 441–485 (1992), hep-th/9202034.
- [KM93] T. R. Klassen and E. Melzer, *Sine-Gordon vs. massive Thirring*, Int. J. Mod. Phys. **A8**, 4131–4174 (1993), hep-th/9206114.
- [KO96] M. A. C. Kneipp and D. I. Olive, *Solitons and vertex operators in twisted affine Toda field theories*, Commun. Math. Phys. **177**, 561–582 (1996), hep-th/9404030.
- [Kor06] M. Kormos, *Boundary renormalisation group flows of unitary superconformal minimal models*, Nucl. Phys. **B744**, 358–379 (2006), hep-th/0512085.
- [Kor07] M. Kormos, *Boundary renormalisation group flows of the supersymmetric Lee-Yang model and its extensions*, (2007), hep-th/0701061.
- [KP91] A. Klumper and P. Pearce, *Analytic calculation of scaling dimensions: Tricritical hard squares and critical hard hexagons*, J. Stat. Phys. **64**, 13 (1991).
- [KP02] M. Kormos and L. Palla, *Some semi-classical issues in boundary sine-Gordon model*, J. Phys. **A35**, 5471–5488 (2002), hep-th/0201230.
- [KS96] S. P. Khastgir and R. Sasaki, *Instability of solitons in imaginary coupling affine Toda field theory*, Prog. Theor. Phys. **95**, 485–502 (1996), hep-th/9507001.
- [KS99] V. E. Korepin and N. A. Slavnov, *The form factors in the finite volume*, Int. J. Mod. Phys. **B13**, 2933–2942 (1999), math-ph/9812026.
- [KTW97] H. Kausch, G. Takacs and G. Watts, *On the relation between $\Phi_{1,2}$ and $\Phi_{1,5}$ perturbed minimal models and unitarity*, Nucl. Phys. **B489**, 557–579 (1997), hep-th/9605104.
- [Lid66] V. B. Lidskii, USSR Comput. Math. and Math. Phys. **6**, 73–85 (1966).
- [Lif56] E. Lifshitz, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 94 (1956), [Soviet Phys. JETP **2**, 73 (1956)].
- [LL01] L. Lellouch and M. Luscher, *Weak transition matrix elements from finite-volume correlation functions*, Commun. Math. Phys. **219**, 31–44 (2001), hep-lat/0003023.
- [LM91] M. Lässig and G. Mussardo, *Hilbert space and structure constants of descendant fields in two-dimensional conformal theories*, Comput. Phys. Commun. **66**, 71–88 (1991).
- [LM99] A. Leclair and G. Mussardo, *Finite temperature correlation functions in integrable QFT*, Nucl. Phys. **B552**, 624–642 (1999), hep-th/9902075.
- [LMC91] M. Lässig, G. Mussardo and J. L. Cardy, *The scaling region of the tricritical Ising model in two- dimensions*, Nucl. Phys. **B348**, 591–618 (1991).
- [LMSS95] A. LeClair, G. Mussardo, H. Saleur and S. Skorik, *Boundary energy and boundary states in integrable quantum field theories*, Nucl. Phys. **B453**, 581–618 (1995), hep-th/9503227.
- [Luk97] S. L. Lukyanov, *Form factors of exponential fields in the sine-Gordon model*, Mod. Phys. Lett. **A12**, 2543–2550 (1997), hep-th/9703190.
- [Lus86a] M. Luscher, *Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories. 1. Stable particle states*, Commun. Math. Phys. **104**, 177 (1986).
- [Lus86b] M. Luscher, *Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories. 2. Scattering states*, Commun. Math. Phys. **105**, 153–188 (1986).
- [Lus91a] M. Luscher, *Signatures of unstable particles in finite volume*, Nucl. Phys. **B364**, 237–254 (1991).
- [Lus91b] M. Luscher, *Two particle states on a torus and their relation to the scattering matrix*, Nucl. Phys. **B354**, 531–578 (1991).
- [LW87] M. Luscher and P. Weisz, *Scaling laws and trivality bounds in the lattice ϕ^4 theory. 1. One component model in the symmetric phase*, Nucl. Phys. **B290**, 25 (1987).
- [LW88] M. Luscher and P. Weisz, *Scaling laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 theory. 2. One component model in the phase with spontaneous symmetry breaking*, Nucl. Phys. **B295**, 65 (1988).
- [LW89] M. Luscher and P. Weisz, *Scaling laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 theory. 3. N component model*, Nucl. Phys. **B318**, 705 (1989).
- [LZ97] S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, *Exact expectation values of local fields in quantum sine- Gordon model*, Nucl. Phys. **B493**, 571–587 (1997), hep-th/9611238.
- [Mar92] M. J. Martins, *Renormalization group trajectories from resonance factorized S matrices*, Phys. Rev. Lett. **69**, 2461–2464 (1992), hep-th/9205024.
- [Mar93] M. J. Martins, *Exact resonance A-D-E S matrices and their renormalization group trajectories*, Nucl. Phys. **B394**, 339–355 (1993), hep-th/9208011.
- [Mar96] A. Mariottini, *Ansatz di Bethe Termodinamico ed Equazione di Destri-de Vega in Teorie di Campo Bidimensionali* (in Italian), Master’s thesis, University of Bologna, 1996.

- [MBO97] J. Moro, J. V. Burke and M. L. Overton, *Siam Journal on Matrix Analysis and Applications* **18**, 793–817 (1997).
- [McG94] W. A. McGhee, *The topological charges of the $a_n^{(1)}$ affine Toda solitons*, *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 2645–2666 (1994), hep-th/9307035.
- [MCPW06] K. A. Milton, I. Cervero-Pelaez and J. Wagner, *Surface divergences and boundary energies in the Casimir effect*, *J. Phys.* **A39**, 6543–6550 (2006), hep-th/0510236.
- [MCW96] C. Mudry, C. Chamon and X.-G. Wen, *Two-dimensional conformal field theory for disordered systems at criticality*, *Nucl. Phys.* **B466**, 383–443 (1996), cond-mat/9509054.
- [MD00] P. Mattsson and P. Dorey, *Boundary spectrum in the sine-Gordon model with Dirichlet boundary conditions*, *J. Phys.* **A33**, 9065–9094 (2000), hep-th/0008071.
- [Mel94] E. Melzer, *Supersymmetric analogs of the Gordon-Andrews identities, and related TBA systems*, (1994), hep-th/9412154.
- [MFP00] J. L. Miramontes and C. R. Fernandez-Pousa, *Integrable quantum field theories with unstable particles*, *Phys. Lett.* **B472**, 392–401 (2000), hep-th/9910218.
- [Mil] K. A. Milton, *The Casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy*, River Edge, USA: World Scientific (2001) 301 p.
- [Mil04] K. A. Milton, *The Casimir effect: Recent controversies and progress*, *J. Phys.* **A37**, R209 (2004), hep-th/0406024.
- [Mir99] J. L. Miramontes, *Hermitian analyticity versus real analyticity in two-dimensional factorised S-matrix theories*, *Phys. Lett.* **B455**, 231–238 (1999), hep-th/9901145.
- [MRS03] G. Mussardo, V. Riva and G. Sotkov, *Finite-volume form factors in semiclassical approximation*, *Nucl. Phys.* **B670**, 464–478 (2003), hep-th/0307125.
- [MRS04a] G. Mussardo, V. Riva and G. Sotkov, *Semiclassical particle spectrum of double sine-Gordon model*, *Nucl. Phys.* **B687**, 189–219 (2004), hep-th/0402179.
- [MRS04b] G. Mussardo, V. Riva and G. Sotkov, *Semiclassical scaling functions of sine-Gordon model*, *Nucl. Phys.* **B699**, 545–574 (2004), hep-th/0405139.
- [MRS05] G. Mussardo, V. Riva and G. Sotkov, *Semiclassical energy levels of sine-Gordon model on a strip with Dirichlet boundary conditions*, *Nucl. Phys.* **B705**, 548–562 (2005), hep-th/0406246.
- [MT90] L. Maiani and M. Testa, *Final state interactions from Euclidean correlation functions*, *Phys. Lett.* **B245**, 585–590 (1990).
- [Mun89] G. Munster, *Tunneling amplitude and surface tension in ϕ^4 theory*, *Nucl. Phys.* **B324**, 630 (1989).
- [Mus92a] G. Mussardo, *Integrable deformations of the nonunitary minimal conformal model $M(3,5)$* , *Int. J. Mod. Phys.* **A7**, 5027–5044 (1992).
- [Mus92b] G. Mussardo, *Off critical statistical models: Factorized scattering theories and bootstrap program*, *Phys. Rept.* **218**, 215–379 (1992).
- [Mus01] G. Mussardo, *On the finite temperature formalism in integrable quantum field theories*, *J. Phys.* **A34**, 7399–7410 (2001), hep-th/0103214.
- [MW95] N. J. MacKay and G. M. T. Watts, *Quantum mass corrections for affine Toda solitons*, *Nucl. Phys.* **B441**, 277–309 (1995), hep-th/9411169.
- [Nak91] T. Nakatsu, *Quantum group approach to affine Toda field theory*, *Nucl. Phys.* **B356**, 499–529 (1991).
- [OTU93a] D. I. Olive, N. Turok and J. W. R. Underwood, *Solitons and the energy momentum tensor for affine Toda theory*, *Nucl. Phys.* **B401**, 663–697 (1993).
- [OTU93b] D. I. Olive, N. Turok and J. W. R. Underwood, *Affine Toda solitons and vertex operators*, *Nucl. Phys.* **B409**, 509–546 (1993), hep-th/9305160.
- [PP99] S. Pallua and P. Prester, *XXZ spin chain in transverse field as a regularization of the sine-Gordon model*, *Phys. Rev.* **D59**, 125006 (1999), hep-th/9902192.
- [PT06] B. Pozsgay and G. Takacs, *Characterization of resonances using finite size effects*, *Nucl. Phys.* **B748**, 485–523 (2006), hep-th/0604022.
- [PZ00] V. B. Petkova and J.-B. Zuber, *Conformal boundary conditions and what they teach us*, (2000), hep-th/0103007.
- [RS90] N. Reshetikhin and F. Smirnov, *Hidden quantum group symmetry and integrable perturbations of conformal field theories*, *Commun. Math. Phys.* **131**, 157–178 (1990).
- [RS99] A. Recknagel and V. Schomerus, *Boundary deformation theory and moduli spaces of D-branes*, *Nucl. Phys.* **B545**, 233–282 (1999), hep-th/9811237.

- [RS01] N. Read and H. Saleur, *Exact spectra of conformal supersymmetric nonlinear sigma models in two dimensions*, Nucl. Phys. **B613**, 409 (2001), hep-th/0106124.
- [RST96] F. Ravanini, M. Stanishkov and R. Tateo, *Integrable perturbations of CFT with complex parameter: The $M(3/5)$ model and its generalizations*, Int. J. Mod. Phys. **A11**, 677–698 (1996), hep-th/9411085.
- [Sal00] H. Saleur, *A comment on finite temperature correlations in integrable QFT*, Nucl. Phys. **B567**, 602–610 (2000), hep-th/9909019.
- [Smi] F. A. Smirnov, *Towards form-factors in finite volume*, Prepared for 4th APCTP Winter School on Integrable Quantum Field Theories and Applications, Cheju Island, Korea, 28 Feb - 4 Mar 2000.
- [Smi89] F. A. Smirnov, *The perturbed $c < 1$ conformal field theories as reductions of sine-Gordon model*, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 4213–4220 (1989).
- [Smi91] F. A. Smirnov, *Exact S matrices for $\phi_{1,2}$ perturbed minimal models of conformal field theory*, Int. J. Mod. Phys. **A6**, 1407–1428 (1991).
- [Smi92] F. A. Smirnov, *Form-factors in completely integrable models of quantum field theory*, Adv. Ser. Math. Phys. **14**, 1–208 (1992).
- [Smi98] F. A. Smirnov, *Quasi-classical study of form factors in finite volume*, (1998), hep-th/9802132.
- [SWK00] H. Saleur and B. Wehefritz-Kaufmann, *Thermodynamics of the complex $su(3)$ Toda theory*, Phys. Lett. **B481**, 419–426 (2000), hep-th/0003217.
- [SWK02] H. Saleur and B. Wehefritz-Kaufmann, *Integrable quantum field theories with $OSP(m/2n)$ symmetries*, Nucl. Phys. **B628**, 407–441 (2002), hep-th/0112095.
- [SWK03] H. Saleur and B. Wehefritz Kaufmann, *Integrable quantum field theories with supergroup symmetries: The $OSP(1/2)$ case*, Nucl. Phys. **B663**, 443 (2003), hep-th/0302144.
- [Sym83] K. Symanzik, *Continuum limit and improved action in lattice theories. 1. Principles and Φ^4 theory*, Nucl. Phys. **B226**, 187 (1983).
- [Tak97a] G. Takacs, *A new RSOS restriction of the Zhiber-Mikhailov-Shabat model and $\Phi_{(1,5)}$ perturbations of nonunitary minimal models*, Nucl. Phys. **B489**, 532–556 (1997), hep-th/9604098.
- [Tak97b] G. Takacs, *Quantum affine symmetry and scattering amplitudes of the imaginary coupled $d_4^{(3)}$ affine Toda field theory*, Nucl. Phys. **B502**, 629–648 (1997), hep-th/9701118.
- [Tak97c] G. Takacs, *The R -matrix of the $U_q(d_4^{(3)})$ algebra and $g_2^{(1)}$ affine Toda field theory*, Nucl. Phys. **B501**, 711–727 (1997), hep-th/9702196.
- [Tot04] G. Z. Toth, *A nonperturbative study of phase transitions in the multi-frequency sine-Gordon model*, J. Phys. **A37**, 9631–9650 (2004), hep-th/0406139.
- [TW99] G. Takacs and G. Watts, *Non-unitarity in quantum affine Toda theory and perturbed conformal field theory*, Nucl. Phys. **B547**, 538–568 (1999), hep-th/9810006.
- [TW02] G. Takacs and G. Watts, *RSOS revisited*, Nucl. Phys. **B642**, 456–482 (2002), hep-th/0203073.
- [TW06] G. Takacs and F. Wagner, *Double sine-Gordon model revisited*, Nucl. Phys. **B741**, 353–367 (2006), hep-th/0512265.
- [YZ90] V. P. Yurov and A. B. Zamolodchikov, *Truncated conformal space approach to scaling Lee-Yang model*, Int. J. Mod. Phys. **A5**, 3221–3246 (1990).
- [Zam86] A. B. Zamolodchikov, *'Irreversibility' of the flux of the renormalization group in a 2-D field theory*, JETP Lett. **43**, 730–732 (1986).
- [Zam89] A. B. Zamolodchikov, *Integrable field theory from conformal field theory*, Adv. Stud. Pure Math. **19**, 641–674 (1989).
- [Zam90] A. B. Zamolodchikov, *Thermodynamic Bethe Ansatz in relativistic models. scaling three state Potts and Lee-Yang models*, Nucl. Phys. **B342**, 695–720 (1990).
- [Zam91a] A. B. Zamolodchikov, *Thermodynamic Bethe ansatz for RSOS scattering theories*, Nucl. Phys. **B358**, 497–523 (1991).
- [Zam91b] A. B. Zamolodchikov, *Two point correlation function in scaling Lee-Yang model*, Nucl. Phys. **B348**, 619–641 (1991).
- [Zam94a] A. B. Zamolodchikov, *Painleve III and 2-d polymers*, Nucl. Phys. **B432**, 427–456 (1994), hep-th/9409108.
- [Zam94b] A. B. Zamolodchikov, *Thermodynamics of imaginary coupled sine-Gordon: Dense polymer finite size scaling function*, Phys. Lett. **B335**, 436–443 (1994).

- [Zam95] A. B. Zamolodchikov, *Mass scale in the sine-Gordon model and its reductions*, Int. J. Mod. Phys. **A10**, 1125–1150 (1995).
- [Zam99] A. B. Zamolodchikov, nyomtatásban nem jelent meg, 1999.
- [ZJ98] P. Zinn-Justin, *Non-linear integral equations for complex affine Toda models associated to simply laced Lie algebras*, J. Phys. **A31**, 6747–6770 (1998), hep-th/9712222.
- [ZZ79] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, *Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models*, Annals Phys. **120**, 253–291 (1979).

Tárgymutató

- β függvény, 19
 - egzakt, konform perturbációszámításban, 23
- $\mathcal{M}_{p,q} + \Phi_{r,s}$ (perturbált minimálmodell), 27
- aszimptotikus állapotok, 158
 - 1+1 dimenzióban, 159
 - peremes elméletben, 185
- Bethe gyök
 - önkonjugált, 38
 - közeli komplex, 38
 - távoli komplex, 38
 - valós, 37
- bootstrap, 178
 - bezárása, 178
- centrális töltés, 161
 - effektív, 17
- csavarodás szám, 169
 - mint topologikus töltés, 29
- defekt operátor, 152
- divergencia
 - infravörös, 21
 - ultraibolya, 20
 - konform perturbációszámításban, 23
- DSG₂, 76
- előreszórási amplitúdó, 159
- fénykúp Bethe Ansatz egyenletek, 37
 - csavart, 61
- faktorizált szórás, 176
 - peremes elméletben, 185
- form-faktor perturbációszámítás, 77
 - Ising modell, 92
 - kétfrekvenciás sine-Gordon modell, 78
- forrás
 - DdV egyenlet, 41
 - balra mozgó, 49
 - centrális, 49
 - jobbra mozgó, 49
- Hamilton operátor
 - nyílt csatorna, 137
 - peremes, 137
 - peremes TCSA, 123
 - Dirichlet határfeltétel, 124
 - Neumann határfeltétel, 124
 - TCSA, 25
 - dimenziótlan, 25
 - zárt csatorna, 137
- henger konform leképezése síkra, 16
- hullámfüggvény renormálás, 12
- kétfrekvenciás sine-Gordon modell
 - η dimenziótlan csatolási paraméter, 79
 - form-faktor perturbációszámítás, 78
 - M interpoláló tömegskála, 79
 - szemiklasszikus form-faktor módszer, 81
- kink függvény
 - DdV egyenlet, 49
- kink gerjesztések mint doménfalak, 181
- klasszikus határeset
 - peremes sine-Gordon modell, 145
- kompaktfikációs sugár, 168
- konform állapottér, 163
 - csonkolt, 24
- konform minimálmodell, 26
 - diagonális, 27
 - perturbált, 27
- konform perturbációszámítás
 - energiaszintek véges térfogatban, 22
 - korrelátorok, 20
- kvantumtérelmélet
 - aszimptotikusan konform, 16
 - aszimptotikusan szabad, 15
 - Lüscher-Weisz trivialitás, 16
 - ultraibolya konform, 16
 - ultraibolya szabad, 16
- Lüscher-féle tömegkorrekció
 - 1+1 dimenzióban, 13
- lyuk, Bethe Ansatz, 37
- második determináció, 40
- nyílt csatorna peremes kvantumtérelméletekben, 136
- operátorszorzat
 - három-pontcsatolás, 163
 - kifejtés, 21
 - konform, 163
- operátorszorzat, konform energia-impulzus tenzor, 162
- operátorszorzat, primér tér energia-impulzus tenzorral, 162
- operátorszorzat, radiálisan rendezett, 162
- peremállapot, 137
 - egyрэszecske csatolás, 138
 - Ghoshal-Zamolodchikov-féle, 138
- perturbáció

- irreleváns, 20
- marginális, 20
- releváns, 20
- perturbált konform térelmélet
 - Hamilton-operátor, 19
 - hatás, 19
- plató
 - DdV egyenlet ultraibolya határeset, 49
 - rezonancia, 96
- primér tér, 161
 - egy-, két- és három-pont függvények, 163
- rapiditás paraméterezés, 159
- renormálási csoport folyam
 - tömeges, 20
 - tömegtelen, 20
- rezonancia
 - Breit-Wigner leírás, 96
 - szélesség kiértékelés, 96, 98
 - effektív Hamilton-operátor, 95
 - szélesség kiértékelés, 97, 98
- rugalmas kétrészecske szórás, 159
- Schwarz derivált, 161
- sine-Gordon modell
 - hajtogatás, 29
- spin
 - konform, 17
- számláló egyenlet, Bethe Ansatz, 42
- számlálófüggvény, 37
 - első determináció, 42
 - második determináció, 42
- szint elkerülés, 95
- szintmetszés, 95
- tömeges Thirring modell, 29
 - dualitás a sine-Gordon modellel, 29
- tömegrés reláció, 25
 - Ising modell mágneses térben, 180
 - sine-Gordon, 30
 - skálázó Lee-Yang modell, 178
- térfogat
 - dimenziótlanított, 25
- TCSA
 - csonkolási hibák, 26, 100
 - effektív Hamilton-operátor, 100
 - extrapoláció, 74, 100
 - levágás, 24
 - ultraibolya divergencia, 26
- topologikus töltés
 - ATFT, 109
 - sine-Gordon, 180
- transzfer mátrix, 32
 - kink, 33
 - perem jelenlétében, 120
- vákuum
 - ϑ -vákuum, 67
 - metastabilis, 87
- vákuumenergia konstans, 23
 - univerzális, 28
 - sine-Gordon, 30
 - skálázó Lee-Yang modell, 179
- végisméret korrekció
 - reziduális, 94, 101
 - vezető
 - kétrészecske állapotokra, 14
 - sokrészecske állapotokra, 32
 - stabil részecske tömegére, 12
- Virasoro ábrázolás
 - legmagasabb súlyú vektor, 163
 - leszármaztatott vektor, 163
 - null-vektor, 163
 - szint, vektoré, 163
 - Verma modul, 163
- Virasoro algebra, 162
 - felcserélési relációk, 162
 - hermitikus konjugálás, 162
 - kontúrintegrál reprezentáció, 162
- zárt csatorna peremes kvantumtérelméletekben, 137